S. PARMEGGIANI 3/4/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)
Corso di laurea: Informatica

$\boxed{\text{N.B}}$ $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$ È EFFETTIVAMENTE UN SOTTOSPAZIO DI V

Infatti: $\boxed{\text{I}}$ $\underline{0} \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$: $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ t.c. $\underline{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$
(prendo $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$)

$\boxed{\text{II}}$ $\underline{w}, \underline{z} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists\, \alpha_i,\ i=1,\dots,n \mid \underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \\ \exists\, \beta_i,\ i=1,\dots,n \mid \underline{z} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{v}_i \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{w} + \underline{z} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \underline{v}_i$$

$\Rightarrow \exists\, \delta_i,\ i=1,\dots,n$ t.c. $\underline{w} + \underline{z} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \underline{v}_i$ (prendo $\delta_i = \alpha_i + \beta_i$)

$\Rightarrow \underline{w} + \underline{z} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$

$\boxed{\text{III}}$ $\left.\begin{array}{l} \underline{v} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle \Rightarrow \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \text{ x opportuni } \alpha_i \in K,\ i=1,\dots,n \\ \beta \in K \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\beta \underline{v} = \beta \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\beta \alpha_i) \underline{v}_i \Rightarrow \exists\, \delta_i \in K,\ i=1,\dots,n$ t.c.

$\beta \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \underline{v}_i$ (prendo $\delta_i = \beta \alpha_i$) $\Rightarrow \beta \underline{v} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$

ESEMPIO L'insieme dei multipli di un vettore $\underline{v} \in V$ è il sottospazio generato da $\underline{v}$: $\{\alpha\underline{v} \mid \alpha \in K\} = \langle \underline{v} \rangle = \mathrm{Span}(\underline{v})$

Si dice che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è un SISTEMA DI GENERATORI DI $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$

Io dirò anche $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è un INSIEME DI GENERATORI di $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$, usando le parentesi graffe, come per gli insiemi, in modo improprio, anche se nelle "liste" $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ ci potrebbero essere ripetizioni.

Si dice che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è un SISTEMA DI GENERATORI di V

(io dirò $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è un INSIEME DI GENERATORI di V)

anche se nelle liste $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ ci potrebbero essere ripetizioni

se $V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\}$

DAL MOMENTO CHE

$$\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\} \subseteq V$$

QUALUNQUE SIANO $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$, ALLORA

$S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ È UN INSIEME DI GENERATORI DI V

$$\iff V \subseteq \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\}$$

$$\iff \underline{v} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\} \ \forall \underline{v} \in V$$

$$\iff \forall \underline{v} \in V \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \mid \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$$

cioè se e solo se ogni vettore $\underline{v}$ di V può essere espresso come combinazione lineare degli elementi di S

ESEMPI

$\boxed{1}$ $V = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R},\ i=1,\dots,n \right\}$ è uno sp. vett. su $\mathbb{R}$

Siano $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ le colonne di I_n: $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \underline{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$S = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$

(analogamente, S è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^n$ come spazio vett. su $\mathbb{C}$). Per verificarlo, devo verificare che

$$\underset{\forall \underline{v}}{\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n}\ \exists\ \underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}_{\text{tanti scalari quanti sono gli elementi di } S} \in \overset{K}{\mathbb{R}} \mid \underline{v} = \alpha_1 \underline{e}_1 + \alpha_2 \underline{e}_2 + \dots + \alpha_n \underline{e}_n$$

Poiché $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R},\ i=1,\dots,n \right\}$, $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che

$\underline{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ per opportuni $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dunque devo verificare che

$\forall \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n\ \exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \mid$

$$\underline{v} \to \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \overset{\underline{e}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} + \alpha_2 \overset{\underline{e}_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} + \alpha_3 \overset{\underline{e}_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} + \dots + \alpha_n \overset{\underline{e}_n}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Siccome $\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

basta prendere $\begin{cases} \alpha_1 = a_1 \\ \alpha_2 = a_2 \\ \vdots \\ \alpha_n = a_n \end{cases}$ (ho quindi verificato che S è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^n$, spazio vett. su $\mathbb{R}$)

$\boxed{2}$ $V = \mathbb{C}_n[x]$ = insieme dei polinomi a coefficienti complessi di grado $\leq n$, dove $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

spazio vett. su $\mathbb{C}$

$\mathcal{S} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ è un insieme di generatori di V su $\mathbb{C}$

Per verificarlo, devo verificare che

tanti coefficienti quanti sono gli elementi di $\mathcal{S}$

$\forall\, f(x) \in \underbrace{\mathbb{C}_n[x]}_{\text{è } V}$ $\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tali che

è un generico $\underline{v}$

$$f(x) = \underbrace{\alpha_0}_{\alpha_0 \cdot 1} + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$$

1 è il 1° elemento di $\mathcal{S}$

Scrivo $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$, con $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, m$

$a_m \neq 0$ ($\deg f(x) = m$)

e $m \leq n$

$= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$

impongo

e trovo

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0 \\ \alpha_1 &= a_1 \\ &\vdots \\ \alpha_m &= a_m \\ \alpha_{m+1} &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_n &= 0 \end{aligned} \Bigg\} \quad m \leq n\,!$$

Ho verificato che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}_n[x]$ su $\mathbb{C}$.
Analogamente si verifica che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}_n[x]$ su $\mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ $V = M_2(\mathbb{C})$ sp. vett. su $K = \mathbb{C}$

verifico che $\mathcal{S} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_4} \right\}$ è un

insieme di generatori di V su $\mathbb{C}$

Devo verificare che $\forall \underline{v} \in V$, ossia $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ (tanti scalari in K quanti sono gli elementi di S)

tali che
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \alpha_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_1} + \alpha_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_2} + \alpha_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_3} + \alpha_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_4}$$

Poiché $\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$,

devo verificare che $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}\ \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tali che
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}.$$

Basta prendere
$$\begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b \\ \alpha_3 = c \\ \alpha_4 = d \end{cases}$$

In modo analogo si verifica che S è un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO TIPO 5 (file: I19tipo5.pdf)

PER CASA: ESERCIZI 1, 2, 3 (file: I19casaT6.pdf)

SPAZI VETTORIALI FINITAMENTE GENERATI

Uno spazio vettoriale V si dice FINITAMENTE GENERATO (abbrevio con f.g.) se ammette un insieme finito di generatori (cioè se esiste un insieme finito di vettori di V che è un insieme di generatori di V)

NON TUTTI GLI SPAZI VETTORIALI SONO f.g.

EXEMPIO $V = \mathbb{C}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $K = \mathbb{C}$ non è f.g. (analogamente lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ su $K = \mathbb{R}$ non è f.g.)

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $V = \mathbb{C}[x]$ sia f.g. su $\mathbb{C}$.

Allora esiste un insieme di generatori $\mathcal{J}$ di $\mathbb{C}[x]$ con un numero finito di elementi: esistono $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x) \in \mathbb{C}[x]$ tali che $\mathcal{J} = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)\}$ sia un insieme di generatori di $\mathbb{C}[x]$.

Posso $n_1 = \deg f_1(x)$

$n_2 = \deg f_2(x)$

$\vdots$

$n_r = \deg f_r(x)$

e ho $m \in \mathbb{N}$ con $m > n_i \ \forall i = 1, .., r$

(ad esempio, prendo

$n = \max \{n_1, n_2, \dots, n_r\}$

ESISTE PERCHE' $n_1, n_2, \dots, n_r$ SONO IN NUMERO FINITO (ESSENDO IN NUMERO FINITO GLI $f_i(x)$)

e prendo $m = n + 1$)

Allora $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ si ha:

$$\deg(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_r f_r(x)) \leq$$

$$\leq \max\{n_1, n_2, \dots, n_r\} \lneq m,$$

per cui, essendo $\deg x^m = m$ è

$$x^m \neq \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_r f_r(x)$$

Dunque x^m non è combinazione lineare di $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)$, ossia

$x^m \notin \langle f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x) \rangle$ e quindi

$\langle f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x) \rangle \subsetneq \mathbb{C}[x]$

e $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)\}$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{C}[x]$.

Questa contraddizione deriva dall'aver supposto l'esistenza di un insieme <u>finito</u> di generatori di $\mathbb{C}[x]$.

Dunque $\mathbb{C}[x]$ non è f.g.

D'ora in poi parleremo esclusivamente di spazi vettoriali f.g., per cui per "SPAZIO VETTORIALE" intenderò "SPAZIO VETTORIALE f.g."