4/4/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA parte di Algebra

Corso di Laurea: Informatica

INSIEMI DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI ED INSIEMI DI VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI

Siano V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e

$\mathcal{A} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ un insieme di vettori di V

è una "lista" più che un insieme, ma uso ugualmente le parentesi graffe (che si usano nelle notazioni degli insiemi)

DEF. 1 $\mathcal{A}$ si dice LINEARMENTE INDIPENDENTE (abbreviato con L. I.) se l'unica combinazione lineare nulla degli elementi di $\mathcal{A}$ è quella con tutti i coefficienti uguali a 0. Quindi $\mathcal{A}$ è L. I se

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \dots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}\\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

DEF. 2 $\mathcal{A}$ si dice LINEARMENTE DIPENDENTE (abbreviato con L. D.) se $\mathcal{A}$ non è L. I. Quindi $\mathcal{A}$ è L. D. se

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ NON TUTTI NULLI tali che $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \dots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}$

N.B. Per convenzione $\emptyset$ è L. I.

N.B Se $\underline{v} \in V$ allora
$\{\underline{v}\}$ è L. D. $\Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$

Infatti: "$\Leftarrow$" se $\underline{v} = \underline{0}$ allora $\exists \alpha \in K$ con $\alpha \neq 0$ e $\alpha\underline{v} = \underline{0}$

ad esempio $\alpha = 1$: $1 \neq 0$ e $\underset{\uparrow \alpha}{1} \cdot \underline{v} \underset{\uparrow \underline{v}=\underline{0}}{=} 1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$

$\Rightarrow \{\underline{v}\}$ è L. D.

Viceversa: "$\Rightarrow$" se $\{\underline{v}\}$ è L. D. allora $\exists \alpha \in K$ con $\alpha \neq 0$ e $\alpha\underline{v} = \underline{0}$.

Essendo $\alpha \neq 0$ in K, esiste $\frac{1}{\alpha} \in K$ e premoltiplicando $\alpha\underline{v} = \underline{0}$ per $\frac{1}{\alpha}$ ottengo

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha\underline{v}) = \frac{1}{\alpha} \cdot \underline{0}$$

ma $\frac{1}{\alpha}(\alpha \underline{v}) = (\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha)\underline{v} = 1\cdot\underline{v} = \underline{v}$ e $\frac{1}{\alpha}\cdot\underline{0} = \underline{0}$

per cui concludo $\underline{v} = \underline{0}$.

ESERCIZI TIPO 6 E 7

(file I19tipo6.pdf e I19tipo7.pdf)

PER CASA: ESERCIZI 4 E 5

file: I19casaT6.pdf

PROPRIETA' DEGLI INSIEMI DI GENERATORI

" " " LINEARMENTE INDIPENDENTI

" " " " DIPENDENTI

Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$\boxed{1}$ Un insieme di vettori di V che contiene un insieme di generatori di V è anch'esso un insieme di generatori di V

(SOVRAINSIEMI DI INSIEMI DI GENERATORI SONO INSIEMI DI GENERATORI)

<u>Infatti</u>: siano $\mathcal{A}$ un insieme di generatori di V con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq V$.

Allora:

PERCHÉ $\mathcal{B} \subseteq V$

$$V = \langle \mathcal{A} \rangle \leq \langle \mathcal{B} \rangle \leq V \Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle = V,$$ ossia $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V

PERCHÉ $\mathcal{A}$ È UN INSIEME DI GENERATORI DI V

SEGUE DAL FATTO CHE $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$

Si può dimostrare:

$\boxed{2}$ Se da un insieme di generatori S di V si toglie un vettore che è combinazione lineare dei rimanenti vettori di S si ottiene un insieme di vettori che è ancora un insieme di generatori di V

ESEMPIO Sia $\underset{4\times 6}{U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

U è una matrice in forma ridotta di Gauss

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sono $\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\underline{u}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

le colonne di U ($\underline{u}_i \in \mathbb{C}^4$, $i = 1, 2, \dots, 6$) e sia

$$V = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5, \underline{u}_6 \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{6} \alpha_i \underline{u}_i \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, 6 \right\}$$

lo spazio vettoriale generato dalle colonne di U.

V è un sottospazio di $\mathbb{C}^4$ ed

$S = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5, \underline{u}_6\}$

è un insieme di generatori di V

$\underline{u}_2 = 3\underline{u}_1 \Rightarrow \underline{u}_2$ è una combinazione lineare dei vettori di

$$S_1 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5, \underline{u}_6\}$$

S_1 E' L'INSIEME CHE SI OTTIENE DA S TOGLIENDO $\underline{u}_2$

infatti:

$$\underline{u}_2 = 3\underline{u}_1 = 3\underline{u}_1 + 0\cdot\underline{u}_3 + 0\cdot\underline{u}_4 + 0\cdot\underline{u}_5 + 0\cdot\underline{u}_6$$

ALLORA S_1 E' ANCORA UN INSIEME DI GENERATORI DI V

ANALOGAMENTE:

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{3}\underline{u}_2 = \frac{1}{3}\underline{u}_2 + 0\cdot\underline{u}_3 + 0\,\underline{u}_4 + 0\,\underline{u}_5 + 0\,\underline{u}_6$$

ALLORA

$S_1^* = \{\underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5, \underline{u}_6\}$ E' ANCORA UN INSIEME DI GENERATORI DI V

è l'insieme che si ottiene da S togliendo $\underline{u}_1$

scelgo di "togliere" $\underline{u}_2$ da S e "rispetto" che:

$S_1 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5, \underline{u}_6\}$
è un insieme di generatori di V

$\underline{u}_3 = 2\underline{u}_1 \Rightarrow$

$\underline{u}_3$ è combinazione lineare dei vettori di

$$S_2 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_4, \underline{u}_5, \underline{u}_6\}$$

(L'INSIEME CHE SI OTTIENE DA S_1 TOGLIENDO $\underline{u}_3$)

infatti: $\underline{u}_3 = 2\underline{u}_1 + 0\cdot\underline{u}_4 + 0\cdot\underline{u}_5 + 0\cdot\underline{u}_6$

ALLORA S_2 E' ANCORA UN INSIEME DI GENERATORI DI V

ANALOGAMENTE:

$\underline{u}_1 = \frac{1}{2}\underline{u}_3 = \frac{1}{2}\underline{u}_3 + 0 \cdot \underline{u}_4 + 0\underline{u}_5 + 0\underline{u}_6$

ALLORA $\boxed{S_2^* = \{\underline{u}_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5, \underline{u}_6\}}$ È ANCORA UN INSIEME DI GENERATORI DI V

L'INSIEME CHE SI OTTIENE DA S_1 TOGLIENDO $\underline{u}_1$

Scelgo di "togliere" $\underline{u}_3$ da S_1 e "ripartire" da

$$S_2 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_4, \underline{u}_5, \underline{u}_6\}$$

è un insieme di generatori di V

$$\underline{u}_5 = 2\underline{u}_1 - 2\underline{u}_4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{u}_5$ è una combinazione lineare dei vettori di

$$S_3 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_4, \underline{u}_6\}$$

(L'INSIEME CHE SI OTTIENE DA S_2 TOGLIENDO $\underline{u}_5$)

infatti: $\underline{u}_5 = 2\underline{u}_1 - 2\underline{u}_4 + 0 \cdot \underline{u}_6$

ALLORA S_3 È ANCORA UN INSIEME DI GENERATORI DI V

Come sopra: invece di togliere $\underline{u}_5$ da S_2 si poteva:

- o togliere $\underline{u}_1$ (perché $\underline{u}_1 = \frac{1}{2}\underline{u}_5 + \underline{u}_4$)
- oppure togliere $\underline{u}_4$ (perché $\underline{u}_4 = \underline{u}_1 - \frac{1}{2}\underline{u}_5$)

ottenendo ancora un insieme di generatori di V

N.B. NON TOGLIERE $\underline{u}_6$!

NESSUN SOTTOINSIEME PROPRIO DI S_3 È
UN INSIEME DI GENERATORI DI V
(QUESTO PERCHÉ CIASCUN VETTORE DI S_3 NON È COMBINAZIONE LINEARE DEI RIMANENTI VETTORI DI S_3)

Abbiamo parlato di proprietà degli insiemi di generatori. Ora vediamo proprietà degli insiemi L.D. ed L.I.

$\boxed{3}$ Un insieme di vettori di V che contiene un insieme L.D è L.D

(SOVRAINSIEMI DI L.D. SONO L.D.)

Infatti: Siano $B = \{\underline{v}_1; \underline{v}_2; \dots; \underline{v}_n\}$ L.D. con $B \subseteq A$.
Allora

B L.D. $\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ NON TUTTI NULLI tali che

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}$$

$(*)$ è una combinazione lineare nulla di vettori di B.
Siccome $B \subseteq A$ allora $\underline{v}_i \in A$ $\forall i = 1, \dots, n$, quindi
$(*)$ è anche una combinazione lineare nulla di vettori di A
Siccome in $(*)$ NON TUTTI GLI α_i SONO NULLI,
allora A è L.D.

$\boxed{4}$ Un insieme di vettori di V contenuto in un insieme L.I. è L.I. (SOTTOINSIEMI DI L.I. SONO L.I.)

Infatti: Siano $A \subseteq B$ con B L.I. Allora se $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = 0$ è una combinazione lineare nulla di

vettori di $\mathcal{A}$, da $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in \mathcal{A}$ ed $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ segue

che $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}$ è anche una combinazione lineare

nulla di vettori di $\mathcal{B}$.

Ma $\mathcal{B}$ è L.I., e quindi

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0} \\ \underline{v}_i \in \mathcal{B} \quad \forall i \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$$

Ho quindi visto che $\left.\begin{array}{l} \sum \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0} \\ \underline{v}_i \in \mathcal{A} \ \forall i \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$

ossia $\mathcal{A}$ è L. I.