I19L17

martedì 16 aprile 2019 10:30

G. PARMEGGIANI 16/4/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

Def: Sia V uno spazio vettoriale

Una **BASE** di V è un insieme di generatori di V che è anche L.I.

ESEMPI

$\boxed{1}$ $V = \mathbb{C}^n$, $K = \mathbb{C}$

$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ = insieme delle colonne di I_n

E' UNA BASE DI $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$ (analogamente $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$)

Si chiama LA BASE CANONICA di $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$ e si indica $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$$

(analogamente di $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$)

Per verificare che $\mathcal{E}$ è una base di $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$ devo verificare:

$\boxed{1}$ $\mathcal{E}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$ (

(L'HO GIÀ VERIFICATO NELLA LEZIONE 14)

$\boxed{2}$ $\mathcal{E}$ è L.I.

Faccio questa 2ª verifica:

$$\Rightarrow \alpha_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{n\times 1} \Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$$

$$= \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}$$

Ho quindi verificato che $\mathcal{E}$ è una base di $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$.

Analogamente si verifica che $\mathcal{E}$ è anche una base di $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$ (sostituendo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}$), LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$ SU $\mathbb{R}$

$\boxed{2}$ $V = \mathbb{C}_n[x] = \{ f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid \deg f(x) \leq n \}$ è uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{C}$

$\mathcal{B} = \{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$ è una base di $\mathbb{C}_n[x]$ su $\mathbb{C}$

Infatti $\boxed{1}$ $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}_n[x]$
(L'HO GIA' VERIFICATO NELLA LEZIONE 14)

$\boxed{2}$ $\mathcal{B}$ è L.I.

Faccio questa 2^a verifica:

$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0$
$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$

sia una combinazione lineare nulla degli elementi di $\mathcal{B}$

Dunque $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$ è il polinomio nullo $\Rightarrow$ tutti i suoi coefficienti sono uguali a 0

$\Rightarrow$ $\alpha_i = 0$ $i = 0, \dots, n$

Ho quindi verificato che $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ è una base di $\mathbb{C}_n[x]$ su $\mathbb{C}$.

Analogamente si verifica che $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ è una base di $\mathbb{R}_n[x]$ su $\mathbb{R}$

$\boxed{3}$ $V = M_2(\mathbb{C})$, $K = \mathbb{C}$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di V su $\mathbb{C}$

Infatti: $\boxed{1}$ $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V

(L'HO GIÀ VERIFICATO NELLA LEZIONE 14)

$\boxed{2}$ $\mathcal{B}$ è L.I.

Faccio questa 2ª verifica: combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$

$$\alpha\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$ lo $\underline{0}$ di V

svolgendo i conti

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha&\beta\\\delta&\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \alpha=\beta=\delta=\gamma=0$$

Analogamente si verifica che $\mathcal{B}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}$

$\boxed{3}$ BIS $\quad V=M_{2\times3}(\mathbb{C})=\left\{\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix} \middle| a,b,c,d,e,f\in\mathbb{C}\right\}$, $K=\mathbb{C}$

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}$$

è una base di V su K. (stessa verifica di sopra)

E, analogamente, $\mathcal{B}$ è una base di $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}$

IN GENERALE: $\quad K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$

$\qquad V=M_{m\times n}(K)$

se A_{ij} è la matrice $m\times n$ con
0 nei posti $\neq (i,j)$
1 nel posto (i,j)

allora

$\mathcal{B}=\{A_{ij} \mid 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\}$ E' UNA BASE DI $M_{m\times n}(K)$ su K

PER CASA: ESERCIZI 1 E 2
(file: I19casaT7.pdf)

TEOREMA · OGNI SPAZIO VETTORIALE (f.g.) HA UNA BASE:

Sia V uno spazio vettoriale (f.g.)
si parte da un insieme di generatori S di V (che essendo V f.g. è un insieme FINITO di vettori) e si tolgono via via i vettori che siano combinazioni lineari di quelli rimasti al passaggio precedente

COME ESTRARRE UNA BASE DI V DA UN INSIEME DI GENERATORI DI V

.... ad ogni passaggio

$S_i = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_k\}$ insieme di generatori di V

Sono al passaggio i-esimo

• vedo se S_i è L.I.

– SE S_i è L.I $\Rightarrow$ S_i è una base di V contenuta in S

S è l'insieme di generatori da cui sono partito

– SE S_i è L.D. $\Rightarrow$ trovo una combinazione lineare

$$(*) \quad \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 + \dots + \alpha_k \underline{w}_k = \underline{0}$$

con NON TUTTI gli α_i uguali a 0

TOLGO DA S_i UN VETTORE $\underline{w}_j$ CHE IN $(*)$ ABBIA $\alpha_j \neq 0$
OTTENGO

TOLTO

$$S_{i+1} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \cancel{\underline{w}_j}, \dots, \underline{w}_k\}$$

CHE E' ANCORA UN INSIEME DI GENERATORI DI V

ITERANDO IL PROCEDIMENTO ARRIVO AD OTTENERE UN INSIEME DI GENERATORI DI V CHE È ANCHE L.I., OSSIA UNA BASE DI V

(e questa base è contenuta nell'insieme di generatori S di V da cui sono partita)

ESERCIZIO TIPO 8

(file: I19tipo8.pdf)

PER CASA: ESERCIZIO 3

(file: I19casa17.pdf)

TEOREMA: Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Siano B_1 e B_2 due basi di V. Allora

(il numero degli elementi di B_1) = (il numero degli elementi di B_2)

Tale numero è quindi un invariante di V, si chiama

LA DIMENSIONE di V e si indica con $\dim V$.