G. PARMEGGIANI 19/4/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)
Corso di Laurea: Informatica

---

La volta scorsa abbiamo visto:

Sia $V$ uno spazio vettoriale

$\boxed{1}$ $\exists \mathcal{B}$ base di $V$ (ESISTENZA DELLE BASI IN UNO SP. VETT.)

$\boxed{2}$ se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono due basi di $V$ allora $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$
(EQUIPOTENZA DELLE BASI DI UNO SP. VETT.)

$\boxed{\text{N.B.}}$ In una base non ci sono ripetizioni.
Anzi, addirittura in un insieme L.I. (ed una base è, in particolare, un insieme L.I.) non ci sono ripetizioni

Infatti: Sia $V$ uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A} = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ una lista di vettori di $V$

Se in $\mathcal{A}$ c'è una ripetizione, allora $\exists\, i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$ per cui si ha: $\underline{v}_i = \underline{v}_j$

$\Rightarrow$ $1 \cdot \underline{v}_i - 1 \underline{v}_j = \underline{0}$

$\Rightarrow$ $1 \cdot \underline{v}_i - 1 \underline{v}_j$ è una combinazione lineare nulla (cioè $= \underline{0}$) di elementi di $\mathcal{A}$ con coefficienti non tutti nulli (il coefficiente di $\underline{v}_i$ è $1$ e $1 \neq 0$)

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ L.D.

Dunque (IN $\mathcal{A}$ C'È UNA RIPETIZIONE) $\Rightarrow$ ($\mathcal{A}$ È L.D.)

Equivalentemente:

$$\underbrace{(\text{NON È VERO CHE } \mathcal{A} \text{ È L.D.})}_{\text{OSSIA: } \mathcal{A} \text{ L.I.}} \Rightarrow \underbrace{(\text{NON È VERO CHE IN } \mathcal{A} \text{ C'È UNA RIPETIZIONE})}_{\text{OSSIA: IN } \mathcal{A} \text{ NON CI SONO RIPETIZIONI}}$$

Come abbiamo detto, questo in particolare comporta che in una base di uno sp. vett. non ci sono ripetizioni.

## ESEMPI DI DIMENSIONE

$\boxed{1}$ $\dim \mathbb{C}^n = ?$
$\dim \mathbb{R}^n = ?$

Sia $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$.

Abbiamo visto (LEZIONE 17) che

l'insieme delle colonne di $I_n$ $= \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\} = \mathcal{E}$ è una base di $K^n$ su $K$

(la base canonica di $K^n$). Allora

$$\dim \underset{K=\mathbb{C}}{\mathbb{C}^n} = \dim \underset{K=\mathbb{R}}{\mathbb{R}^n} = \underset{\text{cardinalità di } \mathcal{E}}{|\mathcal{E}|} = n$$

$\boxed{2}$ $\dim \mathbb{C}_n[x] = ?$
$\dim \mathbb{R}_n[x] = ?$

Sia $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$.

Abbiamo visto (LEZIONE 17) che

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ è una base di $K_n[x] = \{f(x) \in K[x] \mid \deg f(x) \leq n\}$ su $K$

Allore

$$\dim \underset{K=\mathbb{C}}{\mathbb{C}_n[x]} = \dim \underset{K=\mathbb{R}}{\mathbb{R}_n[x]} = \underset{\text{cardinalità di } \mathcal{B}}{|\mathcal{B}|} = n+1$$

$\boxed{3}$ $\dim M_{m\times n}(\mathbb{C}) = ?$
$\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = ?$

Abbiamo visto (LEZIONE 17) che se $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ed

$A_{ij}$ è la matrice $m\times n$ con $\begin{cases} 1 & \text{al posto } (i,j) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

allora $\mathcal{B} = \{A_{ij} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ è una base di $M_{m\times n}(K)$ su $K$.

Allore

$$\dim \underset{K=\mathbb{C}}{M_{m\times n}(\mathbb{C})} = \dim \underset{K=\mathbb{R}}{M_{m\times n}(\mathbb{R})} = \underset{\text{cardinalità di } \mathcal{B}}{|\mathcal{B}|} = m\cdot n$$

$\boxed{4}$ $\dim \{\underline{0}\} = ?$

Posto $W = \{\underline{0}\}$ (spazio vettoriale)
ed $S = \{\underline{0}\}$ (insieme di vettori di $W$)
ho che $S$ è un insieme di generatori di $W$. Ma
$S$ è L.D. ( $\{\underline{v}\}$ è L.D. se $\underline{v} = \underline{0}$ : SI VEDA LEZIONE 15)
quindi NON E' UNA BASE DI $W$

PER CONVENZIONE
$\phi$ una base (L'UNICA BASE!) di $\{\underline{0}\}$.

allora

$$\dim\{\underline{0}\} = \underset{\text{cardinalità}}{|\phi|} = 0$$

$\boxed{\text{N.B.}}$ Sia $V$ uno spazio vettoriale con $\dim V = n$.
Sia $S$ un insieme di vettori di $V$ tale che

1. $S$ è un insieme di generatori di $V$
2. $\underset{\text{cardinalità di } S}{|S|} = n$ (ossia $S$ ha tanti elementi quant'è la dimensione di $V$)

ALLORA

① $\Longrightarrow \exists\, \mathcal{B}$ base di $V$ con $\mathcal{B} \subseteq S$

OGNI INSIEME DI GENERATORI DI $V$ CONTIENE UNA BASE DI $V$ (LEZIONE 16)

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{B} \text{ base di } V \\ \dim V = n\end{array}\right\} \Longrightarrow |\mathcal{B}| = n$$

Ora $\underset{\text{ha } n \text{ elementi}}{\mathcal{B}} \subseteq \underset{\text{ha } n \text{ elementi per ②}}{S} \Longrightarrow \mathcal{B} = S$

A PAROLE: UN INSIEME DI GENERATORI CHE HA TANTI ELEMENTI QUANT'E' LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO E' UNA BASE DELLO SPAZIO (cioè, oltre ad essere un insieme di generatori, è L.I.)

$\boxed{\text{PER CASA: ESERCIZIO 4 (file: I19casaT7.pdf)}}$

# SOMMA E SOMMA DIRETTA DI SOTTOSPAZI

Siano $V$ uno spazio vettoriale ed $U_1$ ed $U_2$ due sottospazi di $V$.

$U_1+U_2 = \{\underline{u}_1+\underline{u}_2 \mid \underline{u}_1 \in U_1,\ \underline{u}_2 \in U_2\}$ è un sottospazio di $V$

VERIFICA:

$\boxed{1}$ $\underline{0} \in U_1+U_2$. Infatti: $\left.\begin{array}{l} U_1 \text{ sottospazio di } V \Rightarrow \underline{0} \in U_1 \\ U_2 \text{ sottospazio di } V \Rightarrow \underline{0} \in U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{0}+\underline{0} \in U_1+U_2$

ma $\underline{0}+\underline{0}=\underline{0}$, quindi $\underline{0} \in U_1+U_2$

$\boxed{2}$ $\underline{w}, \underline{z} \in U_1+U_2 \Rightarrow \underline{w}+\underline{z} \in U_1+U_2$

Infatti: $\left.\begin{array}{l} \underline{w} \in U_1+U_2 \Rightarrow \exists\, \underline{w}_1 \in U_1, \exists\, \underline{w}_2 \in U_2 \mid \underline{w} = \underline{w}_1+\underline{w}_2 \\ \underline{z} \in U_1+U_2 \Rightarrow \exists\, \underline{z}_1 \in U_1, \exists\, \underline{z}_2 \in U_2 \mid \underline{z} = \underline{z}_1+\underline{z}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{w}+\underline{z} = (\underline{w}_1+\underline{w}_2)+(\underline{z}_1+\underline{z}_2) = (\underline{w}_1+\underline{z}_1)+(\underline{w}_2+\underline{z}_2)$

$\in U_1$ perché $\underline{w}_1, \underline{z}_1 \in U_1$ ed $U_1$ è sottospazio di $V$

$\in U_2$ perché $\underline{w}_2, \underline{z}_2 \in U_2$ ed $U_2$ è sottospazio di $V$

$\Rightarrow \underline{w}+\underline{z} \in U_1+U_2$

$\boxed{3}$ $\left.\begin{array}{l} \underline{w} \in U_1+U_2 \\ \alpha \in K \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\underline{w} \in U_1+U_2$

Infatti: $\underline{w} \in U_1+U_2 \Rightarrow \exists\, \underline{w}_1 \in U_1, \exists\, \underline{w}_2 \in U_2 \mid \underline{w} = \underline{w}_1+\underline{w}_2$

$\Rightarrow \alpha\underline{w} = \alpha(\underline{w}_1+\underline{w}_2) = \alpha\underline{w}_1 + \alpha\underline{w}_2$

$\in U_1$ perché $\underline{w}_1 \in U_1$ ed $U_1$ è sottospazio di $V$

$\in U_2$ perché $\underline{w}_2 \in U_2$ ed $U_2$ è sottospazio di $V$

$\Rightarrow \alpha\underline{w} \in U_1+U_2$

CONCLUDENDO: $U_1+U_2$ è un sottospazio di $V$

$U_1+U_2$ si chiama **LA SOMMA** dei sottospazi $U_1$ ed $U_2$

**N.B.** $\{\underline{0}\} \subseteq U_1 \cap U_2$

Infatti $\left.\begin{array}{l} U_1 \text{ sottospazio di } V \Rightarrow \underline{0} \in U_1 \\ U_2 \text{ sottospazio di } V \Rightarrow \underline{0} \in U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{0} \in U_1 \cap U_2$

$\Rightarrow \{\underline{0}\} \subseteq U_1 \cap U_2$

NEL CASO IN CUI SI ABBIA $U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}$

$U_1 + U_2$ si chiama LA SOMMA DIRETTA di $U_1$ ed $U_2$

e si indica con il simbolo $U_1 \oplus U_2$

---

## PROPRIETA' DELLA DIMENSIONE

$V$ uno spazio vettoriale

$\boxed{1}$ $\underset{\text{sottospazio}}{U \leq V} \Longrightarrow \dim U \leq \dim V$

$\boxed{2}$ $\left.\begin{array}{l} \underset{\text{sottospazio}}{U \leq V} \\ \dim U = \dim V \end{array}\right\} \Longrightarrow U = V$

$\boxed{2}$ BIS Applico $\boxed{2}$ con $\{\underline{0}\}$ al posto di $U$ e $U$ al posto di $V$

ottengo: $\left.\begin{array}{l} \underset{\text{sottospazio}}{\{\underline{0}\} \leq U} \\ \dim \{\underline{0}\} = \dim U \end{array}\right\} \Longrightarrow \{\underline{0}\} = U$

Sappiamo che se $U$ è un sottospazio di $V$ allora $\underset{\text{sottospazio}}{\{\underline{0}\} \leq U}$

Inoltre sappiamo che $\dim \{\underline{0}\} = 0$.

Quindi otteniamo:

$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{sottospazio}}{U \leq V} \\ \dim U = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow U = \{\underline{0}\}$

$\boxed{3}$ (TEOREMA DI GRASSMANN)

Siano $U_1$ ed $U_2$ sottospazi di $V$. Abbiamo visto che allora $U_1 + U_2$ è un sottospazio di $V$. Si ha:

$$\dim (U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim (U_1 \cap U_2)$$

$\boxed{4}$ In particolare da $\boxed{3}$ si ricava che se $U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}$ allora

$$\dim (U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

---

# LO SPAZIO DELLE COLONNE DI UNA MATRICE

Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ (oppure $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$)

$$\underset{m \times n}{A} = [\underline{a}_1\ \underline{a}_2\ \dots\ \underline{a}_n] \quad \text{dove } \underline{a}_i \in \mathbb{C}^m$$

ho messo in evidenza le colonne di $A$
ciascuna di loro è un vettore $m \times 1$

LO SPAZIO DELLE COLONNE DI $A$:

$$C(A) = \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle$$

lo spazio generato dalle colonne di $A$

Quindi $C(A)$ è l'insieme delle combinazioni lineari delle colonne di $A$:

$$C(A) = \{ \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \}$$

E' UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{C}^m$

PER TROVARE UNA BASE DI $C(A)$ ...

$A \underset{EG}{\rightsquigarrow} U$ forma ridotta di Gauss per $A$

Sia $k$ = il numero delle colonne dominanti di $U$ e siano

$\underline{u}_{i_1}, \underline{u}_{i_2}, \dots, \underline{u}_{i_k}$ le colonne dominanti di $U$

ALLORA

$\mathcal{B} = \{ \underline{a}_{i_1}, \underline{a}_{i_2}, \dots, \underline{a}_{i_k} \}$ = L'INSIEME DELLE COLONNE <u>DI A</u> CORRISPONDENTI ALLE COLONNE DOMINANTI DI $U$ E' UNA BASE DI $C(A)$.

$\boxed{\text{NB 1}}$ dim $C(A)$ = numero degli elementi di una qualsiasi base di $C(A)$ = $|\mathcal{B}| = k$

definizione di dimensione

$\mathcal{B}$ è una base di $C(A)$

cardinalità di $\mathcal{B}$

dim $C(A)$ SI CHIAMA RANGO DI $A$ E SI INDICA CON IL SIMBOLO $rk\, A$ (oppure $rg\, A$)

$\boxed{\text{NB 2}}$ dim $C(A)$ = dim $C(U)$

perché $\{\underline{u}_{i_1}, \underline{u}_{i_2}, \dots, \underline{u}_{i_k}\}$ è una base di $C(U)$ ed ha $k$ elementi

$\{\underline{a}_{i_1}, \underline{a}_{i_2}, \dots, \underline{a}_{i_k}\}$ è una base di $C(A)$ ed "

MA PUO' ESSERE $C(A) \neq C(U)$ PER CUI PUO' ESSERE CHE $\{\underline{u}_{i_1}, \underline{u}_{i_2}, \dots, \underline{u}_{i_k}\}$ NON SIA UNA BASE DI $C(A)$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$

colonna dominante

$C(U) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \delta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \delta \in \mathbb{C} \right\}$

e $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di $C(U)$

MA $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ NON E' UNA BASE DI $C(A)$:

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin C(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \delta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \delta \in \mathbb{C} \right\}$

invece $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di $C(A)$

$\boxed{\text{ESERCIZIO TIPO 9 (file: I19tipo9.pdf)}}$

$\boxed{\text{PER CASA: ESERCIZIO 5 (file: I19casaT7.pdf)}}$