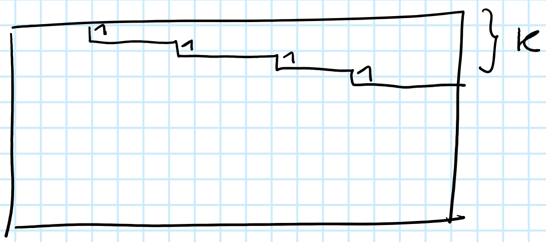
S. PARMEGGIANI 30/4/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

PROPRIETÀ DEL RANGO DI UNA MATRICE

Sia A $m \times n$



$\underset{m\times n}{A} \xrightarrow{EG} \underset{m\times n}{U} =$

$rk A = k =$ numero delle colonne dominanti di U

$\boxed{1}$ (numero delle colonne dominanti di U) = (numero delle righe non nulle di U)

PERCHÉ OGNI "GRADINO" È "ALTO" 1

$\boxed{2}$ $rk A \underset{def}{=} \dim C(A)$

quindi

il numero delle colonne dominanti di una forma ridotta di Gauss di A NON DIPENDE DALLA PARTICOLARE FORMA RIDOTTA DI GAUSS, MA DIPENDE SOLO DA A.

Per cui,

se U_1 ed U_2 sono due forme ridotte di Gauss per A, allora

$$\left(\begin{array}{l}\text{il numero delle colonne}\\ \text{dominanti di } U_1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{il numero delle colonne}\\ \text{dominanti di } U_2\end{array}\right)$$

[si potrebbe dimostrare anche che le colonne dominanti di U_1 sono nelle stesse posizioni in cui sono le colonne dominanti di U_2]

e da $\boxed{1}$ segue che

$$\left(\begin{array}{l}\text{il numero delle righe}\\ \text{non nulle di } U_1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{il numero delle righe}\\ \text{non nulle di } U_2\end{array}\right)$$

$\boxed{3}$ $\quad k \leq m$

Infatti:

$$k \underset{\boxed{1}}{=} \left(\begin{array}{l}\text{il numero delle righe}\\ \text{non nulle di } U\end{array}\right) \leq \left(\begin{array}{l}\text{il numero delle}\\ \text{righe di } U\end{array}\right) = m$$

$A_{m\times n} \Rightarrow U_{m\times n}$

CIOÈ: **IL RANGO DI A È SEMPRE MINORE OD UGUALE AL NUMERO DELLE RIGHE DI A**

$k \leq n$

Infatti:

$$k = \begin{pmatrix} \text{il numero delle} \\ \text{colonne dominanti} \\ \text{di } U \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \text{il numero delle} \\ \text{colonne di } U \end{pmatrix} = n$$

$\boxed{1}$

$A_{m \times n} \Rightarrow U_{m \times n}$

CIOÈ: $\boxed{\text{IL RANGO DI } A \text{ È SEMPRE MINORE OD UGUALE AL NUMERO DELLE COLONNE DI } A}$

$\boxed{4}$ Si può provare che:

$$rk(A) = rk(A^T) = rk(A^H)$$

$\boxed{5}$ Si può provare che se B è tale che $\exists AB$ allora

$$rk(AB) \leq rk(A) \text{ ed anche } rk(AB) \leq rk(B)$$

COME TROVARE UNA BASE DELLO SPAZIO NULLO DI UNA MATRICE

Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ (oppure $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$)

$A \underset{EG}{\rightsquigarrow} U$ forma ridotta di Gauss per A

CERCO UNA BASE DI $N(A)$

def di $N(U)$

$$N(A) = \{\underline{x} \mid \underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{\underline{x}} = \underset{m\times 1}{\underline{0}}\} = \{\underline{x} \mid U\underline{x} = \underline{0}\} = N(U)$$

def di $N(A)$

Siccome $A \underset{EG}{\rightsquigarrow} U$ (U è una forma ridotta di Gauss per A)

allora $[A|\underline{0}] \underset{EG}{\rightsquigarrow} [U|\underline{0}]$ ($[U|\underline{0}]$ è una forma ridotta di Gauss per $[A|\underline{0}]$)

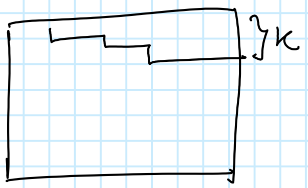
quindi il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente al sistema $U\underline{x} = \underline{0}$

TEOREMA NULLITA' + RANGO

$A_{m\times n}$, $\quad k = rk(A)$

$\dim N(A) = \begin{pmatrix}\text{numero delle} \\ \text{colonne di } A\end{pmatrix} - rk(A) = n - k$

$$\underset{\substack{m\times n \\ rk A = k}}{A} \underset{EG}{\rightsquigarrow} \underset{m\times n}{U} =$$



in U ho k colonne dominanti

In U ci sono $(n-k)$ colonne libere, per cui $A\underline{x} = \underline{0}$ (che è equivalente al sistema $U\underline{x} = \underline{0}$) ha ∞^{n-k} soluzioni, e gli elementi di $N(A)$ (cioè le soluzioni di $A\underline{x} = \underline{0}$) sono "descritti" da $n-k$ parametri: $h_1, h_2, \dots, h_{n-k}$

Siano:

$\underline{v}_1$ il vettore di $N(A)$ che si ottiene prendendo $h_1=1$ e $h_i=0$ $\forall i\neq 1$

$\underline{v}_2$ // // // // $h_2=1$ e $h_i=0$ $\forall i\neq 2$

$\vdots$

$\underline{v}_{n-k}$ // // // // $h_{n-k}=1$ ed $h_i=0$ $\forall i\neq n-k$

Allora $\mathcal{C}=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_{n-k}\}$ è una base di $N(A)$.

ESERCIZIO TIPO 10 (file: I19tipo10.pdf)

PER CASA: ESERCIZIO 1 (file: I19casaT8.pdf)

BASI DELLO SPAZIO DELLE COLONNE : APPLICAZIONE 1

Siano $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n\in K^m$, dove $K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, e

sia W lo spazio generato dai vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$:

$$W=\langle\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n\rangle=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\underline{v}_i \mid \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in K\right\}$$

Allora W è un sottospazio di K^m ed

$\mathcal{S}=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n\}$ è un insieme di generatori di W.

Per trovare una base di W contenuta in $\mathcal{J}$, piuttosto che procedere come nell'Esercizio Tipo 8, posso (SICCOME $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ SONO VETTORI COLONNA) procedere così:

$\boxed{1}$ "Costruisco" una matrice A, $m \times n$, le cui colonne sono gli elementi di $\mathcal{J}$. Ad esempio

$$A = [\underline{v}_1 \ \underline{v}_2 \ \cdots \ \underline{v}_n]$$

$\boxed{2}$ Per costruzione di A ho che

$$C(A) = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = W$$

per cui se $A \underset{EG}{\rightsquigarrow} U$ forma ridotta di Gauss per A e $\{\underline{u}_{i_1}, \underline{u}_{i_2}, \dots, \underline{u}_{i_k}\}$ sono le colonne dominanti di U allora

$\boxed{3}$ $\mathcal{B} = \{\underline{v}_{i_1}, \underline{v}_{i_2}, \dots, \underline{v}_{i_k}\}$ è una base di $C(A) = W$

(insieme delle colonne di A corrispondenti alle colonne dominanti di U)

<u>$\mathcal{B}$ è una base di W contenuta in $\mathcal{J}$</u>

<u>ESEMPIO</u>:

Sono $\mathcal{J} = \left\{ \underset{\underline{v}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{\underline{v}_2}{\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}, \underset{\underline{v}_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{\underline{v}_4}{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$ e $W = \langle \mathcal{J} \rangle$.

Trovare una base di W contenuta in $\mathcal{J}$.

Se $A = [\underline{v}_1\ \underline{v}_2\ \underline{v}_3\ \underline{v}_4] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, allora $W = C(A)$. Cerco una base di $C(A)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{41}(-1)E_{21}(-2)]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{42}(1)E_2(-\frac{1}{2})]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

colonne dominanti di U: la 1^a e la 3^a

$\mathcal{B} = \{ 1^a$ colonna di A, 3^a colonna di $A \}$

$= \{\underline{v}_1, \underline{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

è una base di W $(= C(A))$

contenuta in $\mathcal{S}$

PER CASA: ESERCIZIO 2 (file I19casaT8.pdf)

BASI DELLO SPAZIO DELLE COLONNE: APPLICAZIONE 2

Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in K^n$ con $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

LO STESSO n

e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$.

Per verificare se $\mathcal{B}$ è o meno una base di K^n, piuttosto che verificare che $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori L.I. di K^n, conviene (SOLO PERCHÉ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ SONO VETTORI COLONNA)

Costruire $\underset{n \times n}{A} = [\underline{v}_1\ \underline{v}_2 \ldots \underline{v}_n]$, ossia costruire una matrice A tale che $C(A) = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \rangle$

OSSERVO CHE:

da $C(A) \leq K^n$ segue (LEZIONE 18, PROPRIETÀ $\boxed{2}$ DELLA DIMENSIONE CON $U = C(A)$ e $V = K^n$)

perché ogni $\underline{v}_i \in K^n$

che $\left[\dim C(A) = \dim K^n\right] \Longleftrightarrow \left[C(A) = K^n\right]$

Siccome $\dim C(A) = rk\,A$ per definizione di $rk\,A$ e $\dim K^n = n$ (LEZIONE 18)

allora concludo:

OSSERVAZIONE $\boxed{1}$: $\dim C(A) = rk(A) = n \Longleftrightarrow C(A) = K^n$

Abbiamo poi visto, in un N.B. della LEZIONE 18, che "un insieme di generatori che ha tanti elementi quant'è la dimensione dello spazio è una base"

quindi

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ è una base di K^n $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di K^n $\Longleftrightarrow$ $\langle \mathcal{B} \rangle = K^n$

ha n elementi

ha dimensione n (LEZIONE 18)

spazio generato da $\mathcal{B}$

e siccome per costruzione di A ho che $\langle \mathcal{B} \rangle = C(A)$

Concludo

$$\boxed{\text{OSSERVAZIONE } \boxed{2} : \ \mathcal{B} \text{ è una base di } K^n \iff C(A) = K^n}$$

Mettendo insieme OSSERVAZIONE $\boxed{1}$ ed OSSERVAZIONE $\boxed{2}$ ottengo:

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ è una base di } K^n \iff rk\, A = n}$$

ESEMPIO $\boxed{1}$ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$?

Costruisco $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e calcolo $rk(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-1)\, E_{21}(-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_2(-1)]{}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Dunque $rk(A) = 3$ e quindi $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$

ESEMPIO $\boxed{2}$ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$?

Costruisco $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e calcolo $rk(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-1)\, E_{21}(-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_2(-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

dunque $rk(A) \neq 3$ (è $rk(A) = 2 \lneq 3$) e quindi

$\mathcal{B}$ NON è una base di $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{PER CASA: ESERCIZIO 3 (file I19casaT8.pdf)}}$