G. PARMEGGIANI 27/2/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)
Corso di Laurea : Informatica

POLINOMI

$S \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$S[x]$ = insieme dei polinomi nella INDETERMINATA x ed a coefficienti in S

$f(x) \in S[x]$ se $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ per opportuni $\underbrace{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n}_{\text{i coefficienti di } f(x)} \in S$

se $a_n \neq 0$ IL GRADO di $f(x)$ è $n = \underbrace{\deg f(x)}_{\text{si indica}}$; a_n si chiama IL COEFFICIENTE DIRETTORE di $f(x)$ e a_0 si chiama IL TERMINE NOTO di $f(x)$

NB 1 $\left.\begin{array}{l} c \in S \\ c \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \deg c = 0$

NB2 $c = 0 \in S$ PER CONVENZIONE si pone $\deg 0 = -\infty$

SOMMA DI POLINOMI

$\forall f(x), g(x) \in S[x]$ definiamo $f(x) + g(x) \in S[x]$ nel seguente modo:

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots \dots + a_n x^n$ (dove $a_n \neq 0$ per cui $\deg f(x) = n$)

$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ (dove $b_m \neq 0$ per cui $\deg g(x) = m$)

PER FISSARE LE IDEE SIA $m \leq n$

$$\begin{array}{l} (a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m + \dots + a_n x^n) + \\ (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) = \\ \hline (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots + (a_m + b_m) x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \dots + a_n x^n = f(x) + g(x) \end{array}$$

scrivendo in modo compatto: $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$

e per fissare le idee $m \leq n$ allora

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{m} (a_j + b_j) x^j + \sum_{j=m+1}^{n} a_j x^j$$

$\boxed{\text{NB}}$ $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$

ESEMPIO: se $f(x) = 2 - x^3 + 3x^2$ e $g(x) = 7x + x^3 + 12$ allora

$$\begin{array}{l} (\boxed{2 + 0x + 3x^2 - x^3}) + \quad f(x) \\ (\boxed{12 + 7x + 0x^2 + x^3}) = \quad g(x) \\ \hline \boxed{14 + 7x + 3x^2} \quad f(x)+g(x) \end{array}$$

PRODOTTO DI POLINOMI

$\forall f(x), g(x) \in S[x]$ definiamo $f(x)g(x) \in S[x]$ nel seguente modo:

se $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ allora

$$f(x)\cdot g(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots + a_n b_m x^{n+m} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right) x^j$$

$\boxed{\text{NB}}$ $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

negli insiemi S che abbiamo considerato:

occorre che $\left.\begin{array}{l} a_n \neq 0 \\ b_m \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n b_m \neq 0$

ossia occorre che IN S VALGA LA LEGGE DI CANCELLAZIONE DEL PRODOTTO

(che può anche essere scritto: $\left.\begin{array}{l} a, b \in S \\ a \cdot b = 0 \\ a \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 0$)

ESEMPIO: $f(x) = 2 - x + 6x^4$

$g(x) = 1 + 4x$

$$f(x)g(x) = (2 - x + 6x^4)(1 + 4x) = 2 \underbrace{- x} + 6x^4 + \underbrace{8x} - 4x^2 + 24x^5 =$$

$$= 2 + 7x - 4x^2 + 6x^4 + 24x^5$$

DIVISIONE DI POLINOMI

$S \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$\forall f(x), g(x) \in S[x]$ con $g(x) \neq 0$ ESISTONO E SONO UNICI $q(x), r(x) \in S[x]$

con $g(x) \neq 0$

il quoziente ($q(x)$) il resto ($r(x)$)

tali che $f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x)$ CON $\deg r(x) < \deg g(x)$

$\boxed{\text{NB}}$ $S \neq \mathbb{Z}$: Non posso dividere in $\mathbb{Z}[x]$ $f(x) = x^2$ per $g(x) = 2x$ (perché $\frac{1}{2}x \notin \mathbb{Z}[x]$)

ESEMPIO DI DIVISIONE Divido $f(x) = 7x^4 + 3x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ per $g(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

$$
\begin{array}{l|l}
f(x) & g(x) \\ \hline
\vdots & \text{otterrò } q(x) \\
\text{otterrò} & \\
r(x) &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
7x^4 \qquad\qquad + 3x - 2 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
7x^4 + 7x^3 + 7x^2 & \boxed{7x^2 - 7x} \\ \cline{1-1}
\quad -7x^3 - 7x^2 + 3x - 2 & \\
\quad -7x^3 - 7x^2 - 7x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad \boxed{10x - 2} &
\end{array}
$$

$q(x)$ il quoziente

$r(x)$ il resto

N.B $\deg r(x) < \deg g(x)$

PER CASA: ESERCIZIO 3 (file: I19casaT1.pdf)

RADICI DI UN POLINOMIO Sia $f(x) \in S[x]$. Un numero $x_0 \in S$ si dice una RADICE di $f(x)$ se $\underbrace{f(x_0)}_{\text{"f valutato in } x_0\text{"}} = 0$

oppure ZERO

Quindi x_0 è una radice di $f(x)$ se e solo se x_0 è una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$.

ESEMPIO $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ ha $x_0 = -1$ come radice (è "contata 2 volte")

TEOREMA DI RUFFINI Siano $f(x) \in S[x]$ ed $x_0 \in S$.

x_0 è una radice di $f(x)$ $\iff$ $x - x_0 \mid f(x)$ $\iff$ $\exists\, q(x) \in S[x]$ tale che $f(x) = (x - x_0)\, q(x)$.

divide

RADICI DI POLINOMI REALI DI 2° GRADO Ricordiamo che

se $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, le soluzioni dell'equazione di 2° grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$ sono .....

Sia $\Delta = b^2 - 4ac$ (IL DISCRIMINANTE dell'equazione)

- se $\Delta > 0$ l'equazione ha 2 soluzioni REALI distinte:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- se $\Delta = 0$ l'equazione ha 1 soluzione REALE ("contata due volte")

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- se $\Delta < 0$ (N.B. $-\Delta > 0$) l'equazione non ha soluzioni reali, ma ha 2 soluzioni complesse

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

N.B. $x_1 = \overline{x_2}$ (e $x_2 = \overline{x_1}$)

Abbiamo visto:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ a, b, c \in \mathbb{R} \\ a \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{C} \text{ tali che } \left\{\begin{array}{l} \boxed{f(x_1) = 0} \\ \boxed{f(x_2) = 0} \end{array}\right.$$

x_1 è radice di $f(x)$

x_2 è radice di $f(x)$

con eventualmente $x_1 = x_2$

Ne segue (TEOREMA DI RUFFINI)

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

A parole: Un polinomio di grado 2 a coefficienti reali ha 2 radici complesse (eventualmente coincidenti), per cui si fattorizza in un prodotto di fattori LINEARI in $\mathbb{C}[x]$

↳ "lineare" vuol dire "di grado 1"

In generale vale il seguente teorema:

TEOREMA FONDAMENTALE DELL' ALGEBRA :

$$\forall f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$$

$a_n \neq 0$
$n > 0$

$\exists z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tali che

$$f(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n) = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - z_j)$$

Ogni polinomio di grado $n > 0$ a coefficienti complessi è prodotto di n polinomi di grado 1 (ossia si fattorizza in fattori lineari)

Equivalentemente: ogni equazione di grado n a coefficienti complessi ha n soluzioni complesse CONTATE CON LE LORO MOLTEPLICITA' ALGEBRICHE

ESEMPIO $x^2 + 2x + 1 = 0$ ha la soluzione -1 contata 2 volte

Se $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n =$

$= a_n (x-z_1)^{m_1} (x-z_2)^{m_2} \cdots\cdots (x-z_k)^{m_k}$

dove $z_1, z_2, \dots, z_k$ sono le radici DISTINTE di $f(x)$

m_i si dice la MOLTEPLICITA' ALGEBRICA di z_i

$\forall i = 1, \dots, k$

e $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i = \deg f(x) = n$

Si può provare che

N.B.

$\left.\begin{array}{l} f(x) \in \mathbb{R}[x] \\ z_0 \in \mathbb{C} \\ z_0 \text{ una radice di } f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{z_0}$ è una radice di $f(x)$

Lo abbiamo visto nel caso $\deg f(x) = 2$; abbiamo visto che

l'equazione $(*)$ $ax^2 + bx + c = 0$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

o ha 2 soluzioni reali distinte

o ha 1 soluzione reale "contata 2 volte"

o ha 2 soluzioni complesse distinte

quindi se z_0 è una soluzione di $(*)$

o $z_0 \in \mathbb{R}$ e quindi $\overline{z_0} = z_0$ è una soluzione di $(*)$

oppure $z_0 \notin \mathbb{R}$ ed anche $\overline{z_0}$ è una soluzione di $(*)$