G. PARMEGGIANI 7/5/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)
Corso di Laurea: Informatica

BASI ORDINATE E MAPPE DELLE COORDINATE

Sia V uno sp. vett. su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Def Una **BASE ORDINATA** di V è una base di V in cui si sia fissato l'ordine degli elementi

ESEMPIO $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$

$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ sono LA STESSA base di V, ma sono DUE DIVERSE basi ordinate di V.

Sia V spazio vettoriale su K.
Sia $\mathcal{B} = \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \}$ una base ordinata di V e sia $\underline{v} \in V$.

$\mathcal{B}$ base di $V \Rightarrow \mathcal{B}$ insieme di generatori di $V \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tali che $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

$\mathcal{B}$ base di $V \Rightarrow \mathcal{B}$ L.I. $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono COMPLETAMENTE INDIVIDUATI da $\underline{v}$ e da $\mathcal{B}$

Cioè: se $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$
ma anche $\underline{v} = \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$
allora
$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_n = \alpha_n \end{cases}$$

Infatti:
$$\left.\begin{array}{l} \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \\ \underline{v} = \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \dots + \beta_n \underline{v}_n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n - (\beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \dots + \beta_n \underline{v}_n) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) \underline{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \underline{v}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \underline{v}_n = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1-\beta_1=0 \\ \alpha_2-\beta_2=0 \\ \vdots \\ \alpha_n-\beta_n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1=\alpha_1 \\ \beta_2=\alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_n=\alpha_n \end{cases}$$

ESSENDO $\mathcal{B}$ L.I.

Concludendo: $\mathcal{B}=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$ base ordinata di $V \Rightarrow$ (V sp. su K)

$$\forall \underline{v}\in V \ \exists! \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\in K^n \text{ tale che } \underline{v}=\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\dots+\alpha_n\underline{v}_n$$

"!" SIGNIFICA "UN UNICO"

Def Sia $\mathcal{B}=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n\}$ una base ordinata di V (V sp. vett. su K) e sia $\underline{v}\in V$. Si chiama **VETTORE DELLE COORDINATE** del vettore $\underline{v}\in V$ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B}$ il vettore $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\in K^n$ tale che $\underline{v}=\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\dots+\alpha_n\underline{v}_n$.

Si scrive $C_{\mathcal{B}}(\underline{v})=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$

(ATTENZIONE: nel libro si usa il simbolo $F_{\mathcal{B}}(\underline{v})$ al posto di $C_{\mathcal{B}}(\underline{v})$)

ESEMPIO 1 $\quad V=\mathbb{R}^2,\ K=\mathbb{R},\ \underline{v}=\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}$

$\mathcal{B}_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ è una base ordinata di V.

$\underline{e}_1$ $\quad \underline{e}_2$

$$C_{\mathcal{B}_1}(\underline{v})=C_{\mathcal{B}_1}\left(\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \quad \Big| \quad \begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$$

$\underline{v}=\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}$ $\quad \underline{v}$ $\quad$ 1° elemento di $\mathcal{B}_1$ $\quad$ 2° elemento di $\mathcal{B}_1$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=2\\ \alpha_2=7\end{cases} \Rightarrow C_{\mathcal{B}_1}\left(\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}$$

IN GENERALE, se $K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ e $\mathcal{B}=\{\underline{e}_1;\underline{e}_2;\dots;\underline{e}_n\}$ è la base canonica di K^n, ordinata in modo tale che

$\underline{e}_1$ = 1ª colonna di I_n = 1° elemento di $\mathcal{B}$
$\underline{e}_2$ = 2ª " = 2° "
$\vdots$
$\underline{e}_n$ = n-esima " = n-esimo "

e $\underline{v} \in K^n$ allora $\quad C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = \underline{v}$.

ESEMPIO 2 $\quad V = \mathbb{R}^2,\ K = \mathbb{R}\ ,\ \underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ è una base ordinata di V

$$C_{\mathcal{B}_2}(\underline{v}) \underset{\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}}{=} C_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \Bigg| \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \alpha_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{1^\circ \text{ elemento di } \mathcal{B}_2} + \alpha_2 \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{2^\circ \text{ elemento di } \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 = 7 \end{cases} \Rightarrow C_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 3 $\quad V = \mathbb{R}^2,\ K = \mathbb{R},\ \underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di V

Infatti: se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}$, facendo una EG su A si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 14 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-14)\,E_1(1/2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_2(-1/7)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$\Rightarrow \operatorname{rk} A = 2$

Penso a $\mathcal{B}_3$ come base ORDINATA di $V = \mathbb{R}^2$

$$C_{\mathcal{B}_3}(\underline{v}) \underset{\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}}{=} C_{\mathcal{B}_3}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \Bigg| \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \alpha_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 14 \end{bmatrix}}_{1^\circ \text{ elemento di } \mathcal{B}_3} + \alpha_2 \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{2^\circ \text{ elemento di } \mathcal{B}_3} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 14\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ 14\alpha_1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 7/14 = 1/2 \\ \alpha_2 = 2 - 2\alpha_1 = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

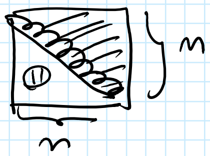
$$\Rightarrow C_{\mathcal{B}_3}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PARENTESI $\quad$ Sia $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Def 1 Una matrice A a coefficienti in K si dice **TRIANGOLARE SUPERIORE** di ordine n se

- $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ (cioè A è quadrata di ordine n)

• $a_{ij} = 0$ se $i > j$ (quindi i coefficienti di A "sotto alla diagonale" sono tutti uguali a zero)

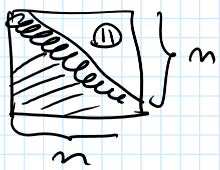
$A =$ 

<u>Def 2</u> Una matrice A a coefficienti in K si dice

TRIANGOLARE INFERIORE di ordine n se

• $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ (cioè A è quadrata di ordine n)

• $a_{ij} = 0$ se $i < j$ (quindi i coefficienti di A "sopra alla diagonale" sono tutti uguali a zero)

$A =$ 

<u>ESEMPIO 4</u>

V = spazio vettoriale complesso delle matrici 2×2 complesse triangolari superiori $= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c \in \mathbb{C} \right\}$

V sp. vett. su $K = \mathbb{C}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_1} ; \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_2} ; \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_3} \right\}$$ è una base ordinata di V

$\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \in V$

$$C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) \underset{\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}{=} C_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\Big|\; \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3$$

ora $$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1+2\alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 = 2 - \alpha_2 = 2 - 3 = -1 \\ 2\alpha_3 = 4 - \alpha_1 = 4 + 1 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = 5/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{N.B.}}$ Se V è uno sp. vett. su K e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$

è una base ordinata di V, allora se $i \in \{1, \dots, n\}$

$$C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_i) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in K^n \;\Big|\; \underline{v}_i = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$$

univocamente individuato da $\underline{v}_i$

Poiché $\underline{v}_i = 0 \cdot \underline{v}_1 + \dots + 0\,\underline{v}_{i-1} + 1 \cdot \underline{v}_i + 0 \cdot \underline{v}_{i+1} + \dots + 0\,\underline{v}_n$

allora

$$C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{e}_i \quad (= i\text{-esima colonna di } I_n)$$

in posizione i

Sia V uno spazio vettoriale su K.

Fissata una base ordinata $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1; \underline{v}_2; \dots; \underline{v}_n\}$ di V,

la funzione

$$C_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$$
$$\underline{v} \longmapsto C_{\mathcal{B}}(\underline{v})$$

si chiama **MAPPA DELLE COORDINATE** rispetto alla base ordinata $\mathcal{B}$.

Gode delle seguenti proprietà:

$\boxed{1}$ $C_{\mathcal{B}}(\underline{v} + \underline{w}) = C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) + C_{\mathcal{B}}(\underline{w}), \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

(CONSERVA L'ADDIZIONE DI VETTORI)

Infatti: siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tali che $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$

e siano $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in K$ tali che $\underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{v}_i$

allora $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \Rightarrow C_B(\underline{v}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

$\underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{v}_i \Rightarrow C_B(\underline{w}) = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C_B(\underline{v}) + C_B(\underline{w}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{bmatrix}$$

inoltre $\left.\begin{array}{l} \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \\ \underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{v}_i \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{v}+\underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\, \underline{v}_i$

$$\Rightarrow C_B(\underline{v}+\underline{w}) = \begin{bmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ $C_B(\alpha \cdot \underline{v}) = \alpha\, C_B(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V \quad \forall \alpha \in K$

(CONSERVA IL PRODOTTO PER SCALARI)

Infatti: siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tali che $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$

$$\Rightarrow C_B(\underline{v}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot C_B(\underline{v}) = \alpha \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \alpha\alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \Rightarrow \alpha \underline{v} = \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i)\, \underline{v}_i$$

$$\Rightarrow C_B(\alpha \underline{v}) = \begin{bmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \alpha\alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ E' SURIETTIVA:

$$\forall \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in K^n \ \exists \underline{v} \in V \mid C_B(\underline{v}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

(si prende $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$)

$\boxed{4}$ È INIETTIVA:

$$\left.\begin{array}{l}\underline{v}, \underline{z} \in V \\ C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = C_{\mathcal{B}}(\underline{z})\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{v} = \underline{z}$$

<u>Infatti</u>: si ha $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} = C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = C_{\mathcal{B}}(\underline{z})$

da $C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}$ segue che $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

da $C_{\mathcal{B}}(\underline{z}) = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}$ segue che $\underline{z} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

per cui $\underline{v} = \underline{z}$.

Vedremo che il fatto che $C_{\mathcal{B}}$ soddisfi $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ si esprime dicendo che $C_{\mathcal{B}}$ è un'APPLICAZIONE (O TRASFORMAZIONE) lineare.

Inoltre, poiché $C_{\mathcal{B}}$ soddisfa $\boxed{3}$ e $\boxed{4}$, $C_{\mathcal{B}}$ è biiettiva.

Un'applicazione lineare che sia biiettiva si dice un ISOMORFISMO (tra spazi vettoriali)

Dunque $C_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo tra V (che è uno spazio vettoriale su K di dimensione n ed ha $\mathcal{B}$ come base ordinata) e K^n.

APPLICAZIONI (O TRASFORMAZIONI) LINEARI

<u>Def</u>: Un'APPLICAZIONE LINEARE è una funzione $T: V \to W$ dove V e W sono SPAZI VETTORIALI ENTRAMBI SU $K = \mathbb{R}$ OPPURE ENTRAMBI SU $K = \mathbb{C}$

tale che

$\boxed{1}$ $T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = T(\underline{v}_1) + T(\underline{v}_2)$, $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

$+$ di V $\qquad$ $+$ di W

prodotto per scalari in V $\qquad$ prodotto per scalari in W

$\boxed{2}$ $T(\alpha \cdot \underline{v}) = \alpha \cdot T(\underline{v})$, $\forall \underline{v} \in V$, $\forall \alpha \in K$

ESEMPIO: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -b \\ a+b \\ b \end{bmatrix}$, $\forall \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

è un'applicazione lineare. Infatti ($\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ sono sp. vett. su $\mathbb{R}$) e

$\boxed{1}$ $\forall \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) \overset{?}{=} T\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)$$

$\boxed{2}$ $T\left(\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) \overset{?}{=} \alpha T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)$, $\forall \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

VERIFICHEREMO LA PROSSIMA VOLTA ...