

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte d'Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

Adesso che sappiamo cos'è il rango, riformuliamo parte di quello che sappiamo sui sistemi lineari. Sappiamo (LEZIONE 10):

hà (*) $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare
e sia $[A|\underline{b}]$ la matrice aumentata di (*)

$[A|\underline{b}] \xrightarrow[\text{EG}]{\text{EG}} [U|\underline{d}]$ è una forma ridotta di Gauss $K[A|\underline{b}]$

① (*) ha soluzioni $\Leftrightarrow \underline{d}$ è libera

② se (*) ha soluzioni allora

CASO 1 (*) ha un'unica soluzione se tutte le colonne di U sono dominanti

CASO 2 se in U ci sono colonne libere, (*) ha
(numero delle colonne libere di U) soluzioni

Se A $m \times n \Rightarrow U$ $m \times n$

$\text{rk}(A) = k \Rightarrow k = \text{numero delle colonne dominanti di } U$
e $(n-k) = \text{numero delle colonne libere di } U$

e nel CASO 2 (*) ha ∞^{n-k} soluzioni

Riformuliamo ① e ② CASO 1 (sapevamo cos'è il rango):

TEOREMA DI ROUCHE-CAPELLI

Sia (*) $Ax = b$ un sistema lineare, con $A m \times n$. Allora:

① (*) ha soluzioni $\Leftrightarrow \text{rk}([A|b]) = \text{rk} A$

↑
(successo
 $\Leftrightarrow$ di è lineare)

② Caso 1 SE (*) ha soluzioni

(*) ha un'unica soluzione $\Leftrightarrow \text{rk}(A) = n$

↑

(tutte le colonne
di U sono dominanti) $\Leftrightarrow$ U ha n colonne
dominanti

↑

U ha n colonne

$\Leftrightarrow \text{rk} U = \text{rk} A = n$