S. PARMEGGIANI 10/5/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

Verifichiamo (si veda la lezione 20) che la funzione

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ definita da } T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -b \\ a+b \\ b \end{bmatrix}, \ \forall \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

è un'applicazione lineare.

[0] il dominio ed il codominio di T sono due spazi vettoriali, entrambi sullo stesso K (in questo caso $K = \mathbb{R}$)

[1] $\forall \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) \stackrel{?}{=} T\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) \underset{\text{def } + \text{ in } \mathbb{R}^2}{=} T\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \end{bmatrix}\right) \underset{\text{def } T}{=} \begin{bmatrix} -(b_1+b_2) \\ (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) \underset{\text{def } T}{=} \begin{bmatrix} -b_1 \\ a_1+b_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_2 \\ a_2+b_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \underset{\text{def } + \text{ in } \mathbb{R}^3}{=} \begin{bmatrix} -b_1-b_2 \\ (a_1+b_1)+(a_2+b_2) \\ b_1+b_2 \end{bmatrix}$$

[2] $T\left(\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) \stackrel{?}{=} \alpha T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right), \ \forall \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T\left(\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) \underset{\text{def } \cdot \text{ per scalari in } \mathbb{R}^2}{=} T\left(\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}\right) \underset{\text{def } T}{=} \begin{bmatrix} -(\alpha b) \\ \alpha a + \alpha b \\ \alpha b \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\alpha T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) \underset{\text{def } T}{=} \alpha \cdot \begin{bmatrix} -b \\ a+b \\ b \end{bmatrix} \underset{\text{def } \cdot \text{ scalari in } \mathbb{R}^3}{=} \begin{bmatrix} \alpha \cdot (-b) \\ \alpha \cdot (a+b) \\ \alpha \cdot b \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{PER CASA: ESERCIZIO 1 (file I19casaT9.pdf)}}$

ESEMPI "IMPORTANTI" DI APPLICAZIONI LINEARI

$\boxed{\text{I}}$ V spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$\lambda \in K$ FISSATO

$T_\lambda : V \longrightarrow V$

definita da $T_\lambda(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in V$

T_λ è un'applicazione lineare. Infatti:

$\boxed{1}$ $T_\lambda(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \overset{?}{=} T_\lambda(\underline{v}_1) + T_\lambda(\underline{v}_2), \quad \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

$T_\lambda(\underline{v}_1+\underline{v}_2) \underset{\text{def } T_\lambda}{=} \lambda(\underline{v}_1+\underline{v}_2) \underset{\text{proprietà distributiva}}{=} \lambda \cdot \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2$

$=$

$T_\lambda(\underline{v}_1) + T_\lambda(\underline{v}_2) \underset{\text{def } T_\lambda}{=} \lambda \cdot \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2$

$\boxed{2}$ $T_\lambda(\alpha \cdot \underline{v}) \overset{?}{=} \alpha \cdot T_\lambda(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in V, \forall \alpha \in K$

$T_\lambda(\alpha \cdot \underline{v}) \underset{\text{def } T_\lambda}{=} \lambda \cdot (\alpha \cdot \underline{v}) = (\lambda \cdot \alpha) \cdot \underline{v}$

$=$ perché $\lambda\alpha = \alpha\lambda$ $\forall \alpha, \lambda \in K$

$\alpha \cdot T_\lambda(\underline{v}) \underset{\text{def } T_\lambda}{=} \alpha \cdot (\lambda \underline{v}) = (\alpha\lambda) \cdot \underline{v}$

$\boxed{\text{II}}$ V spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$\dim V = n$

$\mathcal{B}$ base ordinata di V

$C_B : V \to K^n$

$C_B(\underline{v})$ = vettore delle coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base ordinata B

C_B è un'applicazione lineare

$\boxed{III}$

$$L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$$
$$\underline{v} \longmapsto \underbrace{A}_{m \times n}\underbrace{\underline{v}}_{n \times 1}$$

L_A è un'applicazione lineare (si chiama L'APPLICAZIONE LINEARE INDOTTA DA A)

Infatti:

$\boxed{1}$ $L_A(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \overset{?}{=} L_A(\underline{v}_1) + L_A(\underline{v}_2)$, $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{C}^n$

$$L_A(\underline{v}_1+\underline{v}_2) \underset{\text{def } L_A}{=} A(\underline{v}_1+\underline{v}_2) \underset{\text{proprietà distributiva}}{=} A\underline{v}_1 + A\underline{v}_2$$

$$L_A(\underline{v}_1)+L_A(\underline{v}_2) \underset{\text{def } L_A}{=} A\underline{v}_1 + A\underline{v}_2$$

$\boxed{2}$ $L_A(\alpha \underline{v}) \overset{?}{=} \alpha L_A(\underline{v})$, $\forall \underline{v} \in \mathbb{C}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

$$L_A(\alpha \underline{v}) \underset{\text{def } L_A}{=} A \cdot (\alpha \underline{v}) \underset{\substack{\text{SOLO PERCHÉ} \\ \alpha \text{ È UNO SCALARE}}}{=} \alpha \cdot A \underline{v}$$

$$=$$

$$\alpha \cdot L_A(\underline{v}) \underset{\text{def } L_A}{=} \alpha \cdot (A \underline{v})$$

N.B. 1 Siano V, W, Z spazi vettoriali SULLO STESSO $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e siano $T_1 : V \to W$ e $T_2 : W \to Z$ applicazioni lineari

La funzione composta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend right, "T_2 \circ T_1"'] & W \arrow[r, "T_2"] & Z \end{tikzcd}$$

$T_2 \circ T_1 : V \to Z$ è un'applicazione lineare

NB. 2

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} T : V \to W \\ \text{APPLICAZIONE LINEARE} \end{array}\right\} \Rightarrow T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W}$$

Infatti: $T(\underline{0}_V) \underset{\underline{0}_V = \underline{0}_V + \underline{0}_V}{=} T(\underline{0}_V + \underline{0}_V) \underset{\substack{T \text{ conserva} \\ \text{le somme}}}{=} T(\underline{0}_V) + T(\underline{0}_V)$

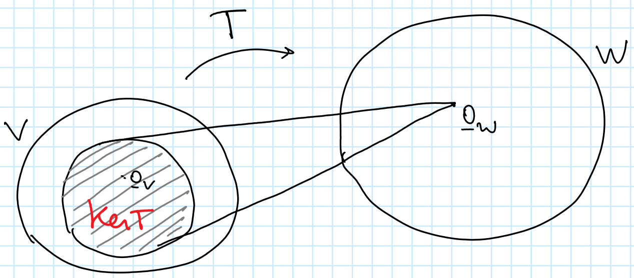
$\Rightarrow \quad T(\underline{0}_V) - T(\underline{0}_V) = T(\underline{0}_V) + T(\underline{0}_V) - T(\underline{0}_V)$

$\Rightarrow \quad \underline{0}_W = T(\underline{0}_V)$

NUCLEO ED IMMAGINE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE

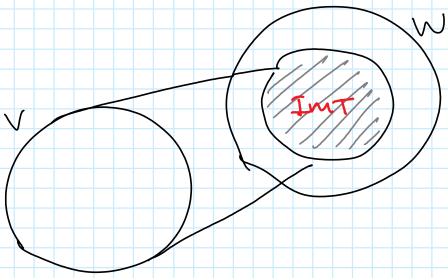
$T : V \to W$ applicazione lineare

$\operatorname{Ker} T = \{\underline{v} \in V \mid T(\underline{v}) = \underline{0}_W\}$ si chiama IL NUCLEO DI T



$T: V \rightarrow W$ applicazione lineare

$\mathrm{Im}T = \{T(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V\}$ si chiama L'IMMAGINE DI T



KerT E' UN SOTTOSPAZIO DI V

Infatti:

$\boxed{1}$ $\underline{0}_V \in \mathrm{Ker}T$

perchè $T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$ (è il NB)

$\boxed{2}$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathrm{Ker}T \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in \mathrm{Ker}T$

perchè $T(\underline{v}_1+\underline{v}_2) = T(\underline{v}_1) + T(\underline{v}_2) = \underline{0}_W + \underline{0}_W = \underline{0}_W$

T applicazione lineare $\Rightarrow$ T conserva le somme

$\underline{v}_1 \in \mathrm{Ker}T \Rightarrow T(\underline{v}_1) = \underline{0}_W$
$\underline{v}_2 \in \mathrm{Ker}T \Rightarrow T(\underline{v}_2) = \underline{0}_W$

$\boxed{3}$ $\underline{v} \in \mathrm{Ker}T$, $\alpha \in K \Rightarrow \alpha\underline{v} \in \mathrm{Ker}T$

perchè $T(\alpha\underline{v}) = \alpha \cdot T(\underline{v}) = \alpha \cdot \underline{0}_W = \underline{0}_W$

T applicazione lineare $\Rightarrow$ T conserva il prodotto per scalari

$\underline{v} \in \mathrm{Ker}T \Rightarrow T(\underline{v}) = \underline{0}_W$

$\mathrm{Im}\,T$ E' UN SOTTOSPAZIO DI W

Lo verifico

$\boxed{1}$ $\underline{0}_W \in \mathrm{Im}\,T$

Infatti: T appl. lineare $\underset{NB}{\Rightarrow}$ $T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W \Rightarrow$

$\underline{0}_W \in \{T(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V\} = \mathrm{Im}\,T$

$\boxed{2}$ $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \mathrm{Im}\,T \Rightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in \mathrm{Im}\,T$

Infatti: $\left.\begin{array}{l} \underline{w}_1 \in \mathrm{Im}\,T \Rightarrow \exists\, \underline{v}_1 \in V \mid \underline{w}_1 = T(\underline{v}_1) \\ \underline{w}_2 \in \mathrm{Im}\,T \Rightarrow \exists\, \underline{v}_2 \in V \mid \underline{w}_2 = T(\underline{v}_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = T(\underline{v}_1) + T(\underline{v}_2) = T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$

T appl. lineare $\Rightarrow$
T conserva le somme

$\Rightarrow \exists\, \underline{z} \in V \mid \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = T(\underline{z})$ (prendo $\underline{z} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$)

$\Rightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in \{T(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V\} = \mathrm{Im}\,T$

$\boxed{3}$ $\left.\begin{array}{l} \underline{w} \in \mathrm{Im}\,T \\ \alpha \in K \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \underline{w} \in \mathrm{Im}\,T$

Infatti: $\underline{w} \in \mathrm{Im}\,T \Rightarrow \exists\, \underline{v} \in V \mid \underline{w} = T(\underline{v})$

$\Rightarrow \alpha \underline{w} = \alpha \cdot T(\underline{v}) = T(\alpha \cdot \underline{v})$

T è un'applicazione lineare $\Rightarrow$
T conserva il prodotto per scalari

$\Rightarrow \exists\, \underline{z} \in V \mid \alpha \underline{w} = T(\underline{z})$ (prendo $\underline{z} = \alpha \underline{v}$)

$\Rightarrow \alpha \underline{w} \in \{T(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V\} = \mathrm{Im}\,T$

PER CASA: ESERCIZIO 2 (file: I19casaT9.pdf)

APPLICAZIONI LINEARI SURIETTIVE,
APPLICAZIONI LINEARI INIETTIVE.

Sia $T: V \to W$ un'applicazione lineare

T è SURIETTIVA se è suriettiva in quanto funzione, ossia se

$$\forall \underline{w} \in W \ \exists \ \underline{v} \in V \mid T(\underline{v}) = \underline{w}.$$

Quindi

$\boxed{\text{N.B. 3}}$ T È SURIETTIVA $\iff$ $\operatorname{Im} T = W$

Sia $T: V \to W$ un'applicazione lineare

T è INIETTIVA se è iniettiva in quanto funzione, ossia se

$$\left.\begin{array}{l} T(\underline{v}_1) = T(\underline{v}_2) \\ \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2$$

$\boxed{\text{NB 4}}$ T È INIETTIVA $\iff$ $\operatorname{Ker} T = \{\underline{0}\}$

" $\Rightarrow$ " IPOTESI: $T: V \to W$ applicazione lineare
T iniettiva

TESI: $\operatorname{Ker} T = \{\underline{0}\}$

DIM: $\underline{0}_V \in \operatorname{Ker} T$ per il $\boxed{\text{NB 2}}$ essendo T applicazione lineare

Quindi $\{\underline{0}_V\} \subseteq \operatorname{Ker} T$ (PER OGNI APPLICAZIONE LINEARE T)

Provo che se T è iniettiva allora $\operatorname{Ker} T \subseteq \{\underline{0}\}$, provando che

$$\underline{v} \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}_V$$

Infatti:

$\underline{v} \in \text{Ker}\,T \Rightarrow T(\underline{v}) = \underline{0}_W \Rightarrow T(\underline{v}) = T(\underline{0}_V) \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}_V$

def Ker T

T appl. lineare $\Rightarrow T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$ N.B.

T iniettiva

"$\Leftarrow$" IPOTESI: $T: V \to W$ applicazione lineare

$\text{Ker}\,T = \{\underline{0}\}$

TESI: T iniettiva

DIM. Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ tali che $T(\underline{v}_1) = T(\underline{v}_2)$.

Devo provare che allora $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$.

$T(\underline{v}_1) = T(\underline{v}_2) \Rightarrow T(\underline{v}_1) - T(\underline{v}_2) = \underline{0}_W$

Ma $T(\underline{v}_1) - T(\underline{v}_2) = T(\underline{v}_1) + T(-\underline{v}_2) = T(\underline{v}_1 + (-\underline{v}_2)) = T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$

$-T(\underline{v}_2) = (-1) \cdot T(\underline{v}_2)$
e T applicazione lineare
$\Rightarrow$ T conserva il prodotto
per scalari

T applicazione lineare
$\Rightarrow$ T conserva le somme

per cui trovo $T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{0}_W$

Ora: $T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{0}_W \Rightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \text{Ker}\,T \Rightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}_V$

def Ker T

$\text{Ker}\,T = \{\underline{0}\}$
PER IPOTESI

$\Rightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2$

NUCLEO ED IMMAGINE DI L_A

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$

$L_A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$

$\underline{v} \mapsto A\underline{v}$

$\text{Ker}\, L_A = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^n \mid L_A(\underline{v}) = \underline{0}\} = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^n \mid A\underline{v} = \underline{0}\} = N(A)$

Dunque $\text{Ker}\, L_A = N(A)$

In particolare, da $\operatorname{Ker} L_A = N(A)$ ed il $\boxed{NB4}$ si ottiene:

- L_A è iniettiva $\iff N(A) = \{\underline{0}\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \underset{\text{LEZIONE 18}}{\iff}$ $\dim N(A) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \iff 0 = \dim N(A) \underset{\text{LEZIONE 19}}{=} \begin{pmatrix}\text{numero delle}\\ \text{colonne di } A\end{pmatrix} - \operatorname{rk} A$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \iff \operatorname{rk}(A) = \begin{matrix}\text{numero delle}\\ \text{colonne di } A\end{matrix} = n$

Mostriamo ora che $\quad \operatorname{Im} L_A = C(A)$

$$\operatorname{Im} L_A \underset{\text{def Im}}{=} \{ L_A(\underline{v}) \mid \underline{v} \in \mathbb{C}^n \} \underset{\text{def } L_A}{=} \{ A\underline{v} \mid \underline{v} \in \mathbb{C}^n \}$$

$\boxed{NB5}$ $\quad A \; m \times n$

se $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ sono le colonne di I_n

e $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ sono le colonne di A

$$A\underline{e}_1 = \underset{\uparrow\;\underline{a}_1}{\begin{bmatrix} \ & & \ \end{bmatrix}} \underset{\uparrow\;\underline{e}_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}} = \underset{\uparrow\;\underline{a}_1}{\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}}$$

$A \cdot$ (1ª colonna di I_n) = 1ª colonna di A

$$A\underline{e}_2 = \underset{\uparrow\;\underline{a}_2}{\begin{bmatrix} \ & & \ \end{bmatrix}} \underset{\underline{e}_2}{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}} = \underset{\underline{a}_2}{\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}}$$

$A \cdot$ (2ª colonna di I_n) = 2ª colonna di A .... etc.

In generale: $A\underline{e}_i = \underline{a}_i \quad i=1,\dots,n$

ossia $A\cdot$(i-esima colonna di I_n) = i-esima colonna di A

Quindi se $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ed $A = [\underline{a}_1\, \underline{a}_2 \dots \underline{a}_n]$ si ha

$$A\underline{v} = A\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = A\left(v_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + v_n\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= A(v_1\underline{e}_1 + v_2\underline{e}_2 + \dots + v_n\underline{e}_n) =$$

$$= Av_1\underline{e}_1 + Av_2\underline{e}_2 + \dots + Av_n\underline{e}_n =$$

$$= v_1A\underline{e}_1 + v_2A\underline{e}_2 + \dots + v_nA\underline{e}_n =$$

$Av_i\underline{e}_i = v_iA\underline{e}_i$ essendo v_i SCALARI!

$$= v_1\underline{a}_1 + v_2\underline{a}_2 + \dots + v_n\underline{a}_n$$

per il NB 5

Quindi $\mathrm{Im}\, L_A = \{A\underline{v} \mid \underline{v} \in \mathbb{C}^n\} =$

$$= \{v_1\underline{a}_1 + v_2\underline{a}_2 + \dots + v_n\underline{a}_n \mid v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{C}\} =$$

$$= \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle = C(A)$$

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ sono LE COLONNE DI A

CONCLUDENDO: $\boxed{\mathrm{Ker}\, L_A = N(A) \text{ e } \mathrm{Im}\, L_A = C(A)}$