

-ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Caso di lavoro: Ingressiva

MATRICE ASSOCIATA AD UN'APPLICAZIONE LINEARE
RISPETTO A FISSATE BASI ORDINATE SU DOMINIO
E CODOMINIO

Prendi V, W spazi vettoriali su K

$T: V \rightarrow W$ applicazione lineare

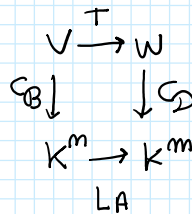
$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base ordinata di V

$\mathcal{D} = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ base ordinata di W

$\Rightarrow \exists!$ $A_{m \times n}$ (LA MATRICE ASSOCIATA A T RISPETTO AUE
BASI ORDINATE \mathcal{B} (SUL DOMINIO) E \mathcal{D} SUL
CODOMINIO) TALE CHE

\uparrow
UN'UNICA

SIA COMMUTATIVO IL DIAGRAMMA



SIGNIFICA:

il risultato che si ottiene "seguendo il percorso" $V \xrightarrow{T} W$
OSSIA APPLICANDO LA COMPOSTA $C_{\mathcal{D}} \circ T$

è lo stesso di quello che si ottiene "seguendo il percorso" $V \xrightarrow{C_{\mathcal{B}}} K^m \xrightarrow{LA} K^m \xrightarrow{C_{\mathcal{D}}} W$
OSSIA APPLICANDO LA COMPOSTA $L_A \circ C_{\mathcal{B}}$

Dunque "il diagramma è commutativo"

SIGNIFICA: $C_{\mathcal{D}} \circ T = L_A \circ C_{\mathcal{B}}$

ossia: $(C_{\mathcal{D}} \circ T)(v) = (L_A \circ C_{\mathcal{B}})(v) \quad \forall v \in V$

Perciò $(C_D \circ T)(v) \stackrel{\text{def comp.}}{=} C_D(T(v))$

$(L_A \circ C_B)(v) \stackrel{\text{def } L_A}{=} L_A(C_B(v)) = A \cdot C_B(v)$

si ottiene in conclusione:

data $T: V \rightarrow W$ applicazione lineare

dove $\dim V = n$ e $\dim W = m$

dato B base ordinata di V e

D base ordinata di W

$\exists!$ A $m \times n$ tale che

$(*) \quad C_D(T(v)) = A C_B(v), \forall v \in V$

chi è A ?

$(\text{la } i\text{-esima colonna di } A) = A \cdot e_i = A \cdot C_B(v_i) = C_D(T(v_i)) \quad \forall i=1, \dots, n$

LEZIONE 21 N.B.S
 LEZIONE 20 $(C_B(v_i) = e_i)$
 A SODDISFA $(*) \forall v \in V$
 in particolare A
 soddisfa $(*)$ $\forall v = v_i$

Quindi

$A = [C_D(T(v_1)) \quad C_D(T(v_2)) \quad \dots \quad C_D(T(v_n))]$

Esercizio TPO 11 (file I19Tpo 11.pdf)

PER CASA: ESERCIZI 3 E 4 (file: I19casaT9.pdf)

MATRICE DI PASSAGGIO DA UNA BASE ORDINATA AD UN'ALTRA (O MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE)

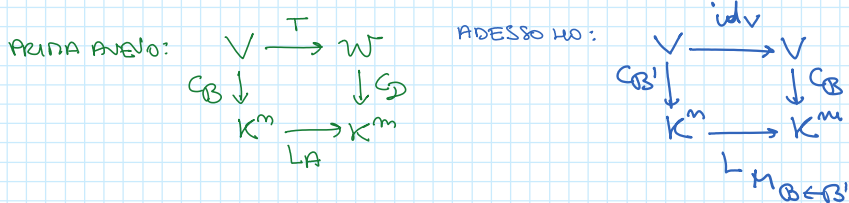
havo V uno spazio vettoriale su K e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ due basi ordinate di V .

La funzione IDENTITA' su V $\text{id}_V: V \rightarrow V$
 $v \mapsto v$
 Le indico con il simbolo

è un'applicazione lineare. La matrice associata a id_V rispetto alle basi ordinate B' nel dominio e B nel codominio si chiama

LA MATRICE DI PASSAGGIO DA B' A B la indico con il simbolo $M_{B \leftarrow B'}$

Dunque applicando quanto detto sopra in id_V al posto di T



HO SOSTITUITO: $T \rightsquigarrow \text{id}_V$ (SOSTITUITO)

$(V = \text{DOMINIO DI } T) \rightsquigarrow (V = \text{DOMINIO DI } \text{id}_V)$
 $(W = \text{CODOMINIO DI } T) \rightsquigarrow (V = \text{CODOMINIO DI } \text{id}_V)$
 $(B = \text{BASE SU DOMINIO DI } T) \rightsquigarrow (B' = \text{BASE SU DOMINIO DI } \text{id}_V)$
 $(D = \text{BASE SU CODOMINIO DI } T) \rightsquigarrow (B = \text{BASE SU CODOMINIO DI } \text{id}_V)$
 $A \rightsquigarrow M_{B \leftarrow B'}$

PRIMA AVEVO (*):

$$C_D(T(v)) = A C_B(v) \quad \forall v \in V$$

ADESSO HO:

$$C_B(\text{id}_V(v)) = M_{B \leftarrow B'} C_{B'}(v) \quad \forall v \in V$$

decui (*) $C_B(v) = M_{B \leftarrow B'} C_{B'}(v), \forall v \in V$

* come $\text{id}_V(v) = v \quad \forall v \in V$

quindi $M_{B \leftarrow B'} = [C_B(v'_1) \ C_B(v'_2) \ \dots \ C_B(v'_n)]$

N.B.: Se $M_{B \leftarrow B'}$ è la matrice di passaggio da B' a B e
 $M_{B' \leftarrow B}$ è la matrice di passaggio da B a B'

$$\text{si ha } M_{B' \leftarrow B} = M_{B \leftarrow B'}^{-1}$$

ESERCIZIO TIPO 12 (file I19tipo12.pdf)

PER CASA: ESERCIZI 1 E 2 (file: I19casaT10.pdf)

COME CAMBIA LA MATRICE ASSOCIATA A T SE SI CAMBIANO LE BASI ORDINATE (SU DOMINIO E CODOMINIO)

$$V \xrightarrow[T_D]{T} W \text{ è associata } A \text{ t.c. } \boxed{C_D(T(v)) = A C_B(v), \forall v \in V} \quad [1]$$

$$V \xrightarrow[D']{T} W \text{ è associata } A' \text{ t.c. } \boxed{C_{D'}(T(v)) = A' C_{B'}(v), \forall v \in V} \quad [2]$$

che legame c'è tra A ed A' ?

nota: non è data T , ma sono date A ,
 B e B' (quindi $M_{B \leftarrow B'}$)
 D e D' (quindi $M_{D \leftarrow D'}$)

problema: Trovare A'

$$\boxed{1} \quad C_D(T(v)) = A C_B(v)$$

$$C_{D'}(T(v)) \stackrel{\uparrow}{=} M_{D \leftarrow D'}^{-1} C_D(T(v)) \stackrel{\uparrow}{=} M_{D \leftarrow D'}^{-1} A C_B(v) \stackrel{\uparrow}{=}$$

$$\begin{aligned} & M_{D \leftarrow D'} \text{ t.c. } C_D(w) = M_{D \leftarrow D'} C_{D'}(w) \quad \forall w \in W \\ & \Rightarrow C_{D'}(w) = M_{D \leftarrow D'}^{-1} C_D(w) \quad \forall w \in W \\ & \text{APPLICO A } w = T(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M_{B \leftarrow B'} \text{ t.c. } \\ & C_B(v) = M_{B \leftarrow B'} C_{B'}(v) \\ & \forall v \in V \end{aligned}$$

$$= M_{D \leftarrow D'}^{-1} A M_{B \leftarrow B'} C_{B'}(v) \quad \forall v \in V$$

Abbiamo provato che

$$\bullet \quad C_{D'}(T(v)) = \left(M_{D \leftarrow D'}^{-1} A M_{B \leftarrow B'} \right) C_{B'}(v) \quad \forall v \in V$$

Perché per $\boxed{2}$ si ha che A' è l'unica matrice t.c.

$$C_{D'}(T(v)) = A' C_{B'}(v) \quad \forall v \in V \text{ allora da } \bullet$$

Concludiamo che

$$A' = M_{D \leftarrow D'}^{-1} A M_{B \leftarrow B'}$$

e poiché $M_{D \leftarrow D'}^{-1} = M_{D' \leftarrow D}$, si ha

$$A' = M_{D' \leftarrow D} A M_{B \leftarrow B'}$$