S. PARMEGGIANI 14/5/2019

-LGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

MATRICE ASSOCIATA AD UN'APPLICAZIONE LINEARE RISPETTO A FISSATE BASI ORDINATE SU DOMINIO E CODOMINIO

Siano V, W spazi vettoriali su K

$T: V \to W$ applicazione lineare

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ base ordinata di V

$\mathcal{D} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m\}$ base ordinata di W

$\Rightarrow \exists!\, A_{m \times n}$ (LA MATRICE ASSOCIATA A T RISPETTO ALLE BASI ORDINATE $\mathcal{B}$ (SUL DOMINIO) E $\mathcal{D}$ SUL CODOMINIO) TALE CHE

UN'UNICA

SIA COMMUTATIVO IL DIAGRAMMA

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "C_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "C_{\mathcal{D}}"] \\ K^n \arrow[r, "L_A"'] & K^m \end{tikzcd}$$

SIGNIFICA:

"il risultato che si ottiene "seguendo il percorso" $V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{C_{\mathcal{D}}} K^m$

OSSIA APPLICANDO LA COMPOSTA $C_{\mathcal{D}} \circ T$

è lo stesso di quello che si ottiene "seguendo il percorso" $V \xrightarrow{C_{\mathcal{B}}} K^n \xrightarrow{L_A} K^m$

OSSIA APPLICANDO LA COMPOSTA $L_A \circ C_{\mathcal{B}}$

Dunque "il diagramma è commutativo"

SIGNIFICA: $C_{\mathcal{D}} \circ T = L_A \circ C_{\mathcal{B}}$

ossia: $(C_{\mathcal{D}} \circ T)(\underline{v}) = (L_A \circ C_{\mathcal{B}})(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$

Poiché $(C_D \circ T)(\underline{v}) \underset{\uparrow}{=} C_D(T(\underline{v}))$ e

def composta

$(L_A \circ C_B)(\underline{v}) = L_A(C_B(\underline{v})) \underset{\uparrow}{=} A \cdot C_B(\underline{v})$

def L_A

si ottiene in conclusione:

data $T: V \to W$ applicazione lineare

dove $\dim V = n$ e $\dim W = m$

date B base ordinata di V e

D base ordinata di W

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists!\ A \ m \times n \text{ tale che} \\ (*) \quad C_D(T(\underline{v})) = A\, C_B(\underline{v}),\ \forall \underline{v} \in V \end{array}}$$

chi è A?

$$\begin{pmatrix} \text{la i-esima} \\ \text{colonna di } A \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} A \cdot \underline{e}_i \underset{\uparrow}{=} A \cdot C_B(\underline{v}_i) \underset{\uparrow}{=} C_D(T(\underline{v}_i)) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

LEZIONE 21 N.B. 5

LEZIONE 20 ($C_B(\underline{v}_i) = \underline{e}_i$)

A SODDISFA $(*)$ $\forall \underline{v} \in V$ in particolare A soddisfa $(*)$ per $\underline{v} = \underline{v}_i$

Quindi

$$A = [C_D(T(\underline{v}_1)) \quad C_D(T(\underline{v}_2)) \ \dots\dots \ C_D(T(\underline{v}_n))]$$

ESERCIZIO TIPO 11 (file I19tipo11.pdf)

PER CASA: ESERCIZI 3 E 4 (file: I19casaT9.pdf)

MATRICE DI PASSAGGIO DA UNA BASE ORDINATA AD UN'ALTRA (O MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE)

Siano V uno spazio vettoriale su K e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_n'\}$ due basi ordinate di V.

La funzione IDENTITÀ su V $\quad id_V : V \longrightarrow V$, $\quad \underline{v} \mapsto \underline{v}$

la indico con il simbolo

è un'applicazione lineare. La matrice associata a id_V rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}'$ nel dominio e $\mathcal{B}$ nel codominio si chiama **LA MATRICE DI PASSAGGIO DA $\mathcal{B}'$ A $\mathcal{B}$**. La indico con il simbolo $M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$

Dunque applicando quanto detto sopra con id_V al posto di T

PRIMA AVEVO:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "C_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "C_{\mathcal{D}}"] \\ K^n \arrow[r, "L_A"'] & K^m \end{tikzcd}$$

ADESSO HO:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "C_{\mathcal{B}'}"'] & V \arrow[d, "C_{\mathcal{B}}"] \\ K^n \arrow[r, "L_{M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}}"'] & K^n \end{tikzcd}$$

HO SOSTITUITO: $\quad T \xrightarrow{\text{SOSTITUITO}} id_V$

(V = DOMINIO DI T) $\rightsquigarrow$ (V = DOMINIO DI id_V)

(W = CODOMINIO DI T) $\rightsquigarrow$ (V = CODOMINIO DI id_V)

($\mathcal{B}$ = BASE SU DOMINIO DI T) $\rightsquigarrow$ ($\mathcal{B}'$ = BASE SU DOMINIO DI id_V)

($\mathcal{D}$ = BASE SU CODOMINIO DI T) $\rightsquigarrow$ ($\mathcal{B}$ = BASE SU CODOMINIO DI id_V)

$A \rightsquigarrow M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$

PRIMA AVEVO $(*)$:
$$C_{\mathcal{D}}(T(\underline{v})) = A\, C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$$

ADESSO HO:
$$C_{\mathcal{B}}(id_V(\underline{v})) = M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}\, C_{\mathcal{B}'}(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$$

siccome $id_V(\underline{v}) = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in V$

da cui
$$\boxed{(**):\ C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}\, C_{\mathcal{B}'}(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in V}$$

quindi
$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \left[C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_1') \ \ C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_2') \ \cdots \ C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_n') \right]$$

N.B.: Se $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ e
$M_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

si ha $$M_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}^{-1}$$

ESERCIZIO TIPO 12 (file I19tipo12.pdf)

PER CASA: ESERCIZI 1 E 2 (file: I19casaT10.pdf)

COME CAMBIA LA MATRICE ASSOCIATA A T SE SI CAMBIANO LE BASI ORDINATE (SU DOMINIO E CODOMINIO)

$\underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{T} \underset{\mathcal{D}}{W}$ è associata A t.c. $\boxed{C_{\mathcal{D}}(T(\underline{v})) = A\,C_{\mathcal{B}}(\underline{v}),\ \forall \underline{v}\in V}$ $\boxed{1}$

$\underset{\mathcal{B}'}{V} \xrightarrow{T} \underset{\mathcal{D}'}{W}$ è associata A' t.c. $\boxed{C_{\mathcal{D}'}(T(\underline{v})) = A'\,C_{\mathcal{B}'}(\underline{v}),\ \forall \underline{v}\in V}$ $\boxed{2}$

che legame c'è tra A ed A'?

ossia: non è data T, ma sono date A,
$\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ (quindi $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$)
$\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ (quindi $M_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}$)

problema: Trovare A'

$\boxed{1}$ $\boxed{C_{\mathcal{D}}(T(\underline{v})) = A\, C_{\mathcal{B}}(\underline{v})}$

$$C_{\mathcal{D}'}(T(\underline{v})) = M^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\, C_{\mathcal{D}}(T(\underline{v})) = M^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\, A\, C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) =$$

$M_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}$ t.c. $C_{\mathcal{D}}(\underline{w}) = M_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\, C_{\mathcal{D}'}(\underline{w})\ \forall \underline{w} \in W$

$\Rightarrow\quad C_{\mathcal{D}'}(\underline{w}) = M^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\, C_{\mathcal{D}}(\underline{w})\ \forall \underline{w} \in W$

APPLICO A $\underline{w} = T(\underline{v})$

$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ t.c. $C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}\, C_{\mathcal{B}'}(\underline{v})$ $\forall \underline{v} \in V$

$$= M^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\, A\, M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}\, C_{\mathcal{B}'}(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$$

Abbiamo provato che

$$\bullet\quad \boxed{C_{\mathcal{D}'}(T(\underline{v})) = \left(M^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\, A\, M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}\right) C_{\mathcal{B}'}(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V}$$

Poiché per $\boxed{2}$ si ha che A' è l'unica matrice t.c.

$$C_{\mathcal{D}'}(T(\underline{v})) = A'\, C_{\mathcal{B}'}(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$$ allora da $\bullet$

concludiamo che

$$A' = M^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\, A\, M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$$

e poiché $M^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = M_{\mathcal{D}'\leftarrow\mathcal{D}}$, anche

$$A' = M_{\mathcal{D}'\leftarrow\mathcal{D}}\, A\, M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$$