S. PARMEGGIANI 17/5/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

ESERCIZIO TIPO 13 (file: I19tipo13.pdf)

PER CASA: ESERCIZIO 3 (file: I19casaT10.pdf)

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

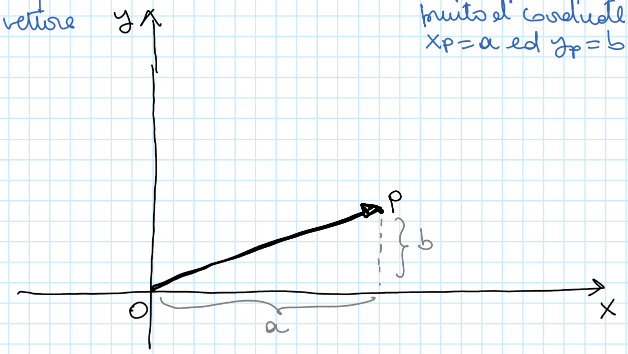
Fissato nel piano un sistema di riferimento Oxy

$\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \xleftrightarrow{\text{è individuato}} P = (a,b) \xrightarrow{\text{è rappresentato}} O \to P$

vettore

punto di coordinate $x_P = a$ ed $y_P = b$

"freccia" che parte da O e finisce in P (VETTORE APPLICATO)

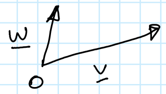


$\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ è rappresentato dalla freccia $O \to P$ dove $O(0,0)$, $P(a,b)$

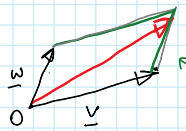
coordinate di O

coordinate di P

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA



le "frecce" si sommano:



← parallelogramma di lati $\underline{v}$ e $\underline{w}$

LA FRECCIA ROSSA E' LA SOMMA DELLE FRECCE $\underline{v}$ E $\underline{w}$

$$\underline{v}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},\ \underline{w}=\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow \underbrace{\underline{v}+\underline{w}}_{\text{somma in }\mathbb{R}^2}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\underbrace{+}_{\text{somma in }\mathbb{R}^2}\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c\\b+d\end{bmatrix}$$

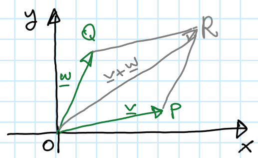
MOSTRO CHE SE $\boxed{\text{P rappresenta } \underline{v} \text{ nel piano } Oxy \text{ e Q rappresenta } \underline{w} \text{ nel piano } Oxy}$ ALLORA

la somma delle frecce $\boxed{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}$ → che ottengo con la regola del parallelogramma

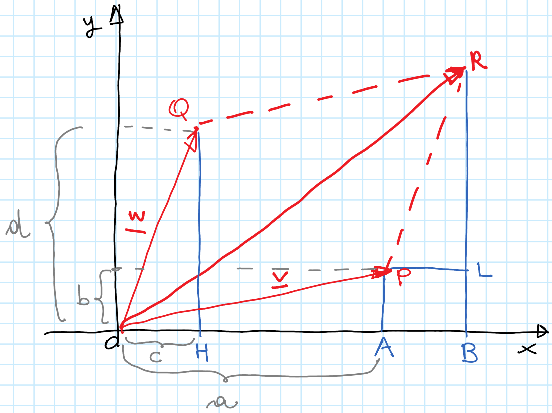
è una freccia $\overrightarrow{OR}$ dove R è il punto che rappresenta $\underline{v}+\underline{w}=\begin{bmatrix}a+c\\b+d\end{bmatrix}$ nel piano Oxy

somma in $\mathbb{R}^2$ dei due vettori colonna $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$

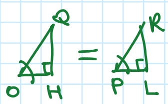
Ossia mostro che nel piano Oxy



$$\left.\begin{matrix} x_P=a\\ y_P=b\\ x_Q=c\\ y_Q=d\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_R=a+c\\ y_R=b+d\end{matrix}\right.$$

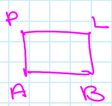


N.B.



PERCHÈ SONO DUE TRIANGOLI RETTANGOLI CON IPOTENUSA UGUALE ($|OQ|=|PR|=$ "lunghezza di $\underline{w}$") E GLI ANGOLI A DUE A DUE UGUALI (la retta per O e Q è parallela alla retta per R e P, e la retta per O e H è parallela alla retta per P e L)

Inoltre



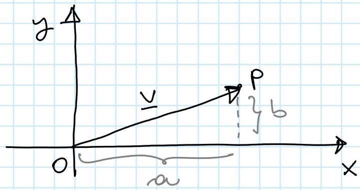
è un rettangolo, quindi $\left\{\begin{matrix}|AB|=|PL|\\ |PA|=|LB|\end{matrix}\right.$

$$x_R=|OB|=|OA|+|AB|=|OA|+|PL|=|OA|+|OH|=x_P+x_Q=a+c$$

$$y_R=|RB|=|RL|+|LB|=|QH|+|LB|=|QH|+|PA|=y_Q+y_P=d+b$$

NORME

Sia $\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$



$$|OP| = \sqrt{|a|^2+|b|^2} = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{[a \ \ b]\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} = \sqrt{\underline{v}^T \underline{v}}$$

la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $f(\underline{v}) = \sqrt{\underline{v}^T \underline{v}}$

associa ad ogni vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ la sua "lunghezza" euclidea.

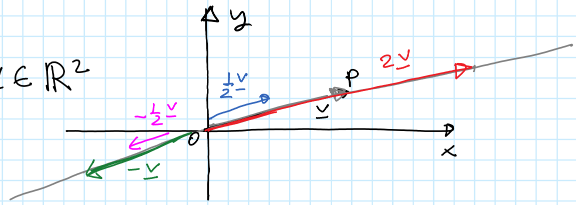
f gode delle 3 seguenti proprietà:

$\boxed{1}$ $\underbrace{f(\underline{v}) \geq 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2}$ e $\underbrace{[f(\underline{v}) = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}]}$

ogni vettore ha "lunghezza" ≥ 0

l'unico vettore che ha lunghezza uguale a 0 è quello in cui P coincide con O (ossia il segmento OP collassa nel punto O)

$\boxed{2}$ se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$



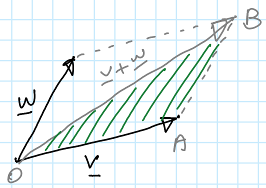
Il vettore $\alpha\underline{v}$ è rappresentato da un punto sulla retta per O e P (P è il punto che individua $\underline{v}$).

$\alpha\underline{v}$ è orientato ↗ COME $\underline{v}$ se $\alpha > 0$ ("CONCORDE" CON $\underline{v}$)

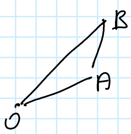
↘ IN SENSO OPPOSTO A $\underline{v}$ se $\alpha < 0$ ("DISCORDE" A $\underline{v}$)

e $$\underbrace{f(\alpha\underline{v})}_{\text{la "lunghezza" di } (\alpha \underline{v})} = \underbrace{|\alpha|}_{\text{MODULO DI } \alpha} \cdot \underbrace{f(\underline{v})}_{\text{la lunghezza di } \underline{v}}$$

$\boxed{3}$ dalla regola del parallelogramma:



nel triangolo



$|OA|$ = lunghezza di $\underline{v}$ = $f(\underline{v})$

$|BA|$ = lunghezza di $\underline{w}$ = $f(\underline{w})$

$|OB|$ = lunghezza di $\underline{v}+\underline{w}$ = $f(\underline{v}+\underline{w})$

In un triangolo, la lunghezza di un lato è sempre minore od uguale alla somma delle lunghezze degli altri due lati. Quindi

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE: $f(\underline{v}+\underline{w}) \le f(\underline{v}) + f(\underline{w})$

Def V spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Una funzione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (IL CODOMINIO DI $\|\cdot\|$ È $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ANCHE QUANDO $K = \mathbb{C}$)

si dice una NORMA su V se soddisfa le seguenti condizioni:

$\boxed{1}$ $\|\underline{v}\| > 0 \quad \forall \underline{v} \neq \underline{0},\ \underline{v} \in V$ e $\|\underline{0}\| = 0$

$\boxed{2}$ $\|\alpha \cdot \underline{v}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{v}\|, \ \forall \underline{v} \in V, \ \forall \alpha \in K$

$\boxed{3}$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

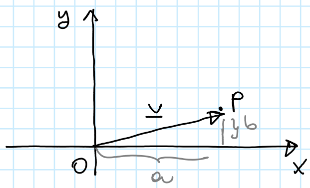
$$\|\underline{v}+\underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|, \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

ESEMPI

$\boxed{1}$ $V = \mathbb{R}^2, \quad K = \mathbb{R}$

$\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in V$

$|OP| = \sqrt{\underline{v}^T \underline{v}}$



LA NORMA EUCLIDEA SU $\mathbb{R}^2$: $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\|\underline{v}\|_2 \underset{def}{=} \sqrt{\underline{v}^T \underline{v}}$$

$V = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R}$

LA NORMA EUCLIDEA SU $\mathbb{R}^n$: $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\|\underline{v}\|_2 = \sqrt{\underline{v}^T \underline{v}}$$

se $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\|\underline{v}\|_2 = \sqrt{[v_1\ v_2 \cdots\ v_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

LA NORMA EUCLIDEA SU $\mathbb{C}^n$: $\|\cdot\|_2 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$V = \mathbb{C}^n,\ K = \mathbb{C}$

$$\|\underline{v}\|_2 = \sqrt{\underline{v}^H \underline{v}}$$

ATTENZIONE

N.B.
PRENDENDO SEMPRE $\underline{v}^H$ (ANCHE QUANDO $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$) NON SI SBAGLIA MAI

se $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$, allora

$$\|\underline{v}\|_2 = \sqrt{[\overline{v}_1\ \overline{v}_2 \ \cdots\ \overline{v}_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}} = \sqrt{\overline{v}_1 v_1 + \overline{v}_2 v_2 + \cdots + \overline{v}_n v_n} = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2}$$

ESEMPIO

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \\ 7-i \end{bmatrix}$$

$$\|\underline{v}\|_2 = \sqrt{[\overline{1}\ \ \overline{1+2i}\ \ \overline{7-i}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \\ 7-i \end{bmatrix}} =$$

$$= \sqrt{[1\ \ 1-2i\ \ 7+i] \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \\ 7-i \end{bmatrix}} =$$

$$= \sqrt{1^2 + (1-2i)(1+2i) + (7+i)(7-i)} =$$

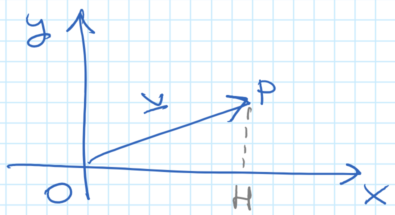
$$= \sqrt{1 + 1^2 - (2i)^2 + 7^2 - i^2} =$$

$$= \sqrt{1 + 1 - (-4) + 49 - (-1)} =$$

$$= \sqrt{1+1+4+49+1} = \sqrt{56}$$

$\boxed{2}$ NORMA TAXI-DRIVER (O DI MANHATTAN) $\|\cdot\|_1$

$\underline{v} \in \mathbb{R}^2$



(norma taxi-driver di $\underline{v}$) $= \|\underline{v}\|_1 = |OH| + |PH|$

quindi se $\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\quad \|\underline{v}\|_1 = |a| + |b|$

in $\mathbb{R}^n$: $\quad \|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \longmapsto \|\underline{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|$$

stessa definizione in $\mathbb{C}^n$: $\quad \|\cdot\|_1 : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \longmapsto \|\underline{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|$$

ESEMPIO : ricordo che se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ è

IL CONIUGATO DI z È $\bar{z} = a - ib$ ed

IL MODULO DI z È $|z| = \sqrt{z\bar{z}} =$

$$= \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 - (ib)^2} = \sqrt{a^2 - i^2 b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \\ 7-i \end{bmatrix} \right\|_1 = |1| + |1+2i| + |7-i| = 1 + \sqrt{1^2 + 2^2} + \sqrt{49+1} = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{50}$$