I19L24

martedì 21 maggio 2019 10:30

G. PARMEGGIANI 21/5/2019

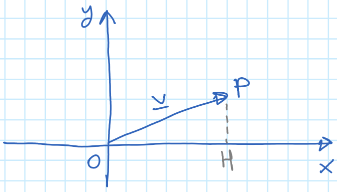
ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

Facciamo un altro esempio di norma su $\mathbb{R}^n$ e su $\mathbb{C}^n$ (oltre a $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_1$ viste la volta scorsa)

$\boxed{3}$ LA NORMA $\|\cdot\|_\infty$

$\underline{v} \in \mathbb{R}^2$



$\|\underline{v}\|_\infty = \max\{|OH|, |HP|\}$

quindi se $\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\|\underline{v}\|_\infty = \max\{|a|, |b|\}$

in $\mathbb{R}^n$: $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \mapsto \|\underline{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}$$

stessa definizione in $\mathbb{C}^n$: $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \mapsto \|\underline{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}$$

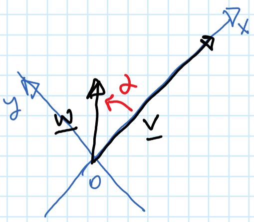
ESEMPIO:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \\ 7-i \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max\{|1|, |1+2i|, |7-i|\} = \max\{1, \sqrt{5}, \sqrt{50}\} = \sqrt{50}$$

N.B. $\|\underline{v}\|_\infty \leq \|\underline{v}\|_2 \leq \|\underline{v}\|_1 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{C}^n$

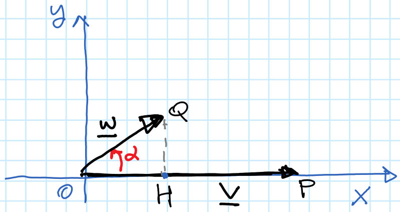
IL COSENO DELL' ANGOLO TRA DUE VETTORI DI $\mathbb{R}^2$

$\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$, $\quad \underline{v} \neq \underline{0} \neq \underline{w}$



[1] scelgo un sistema di riferimento Oxy in modo tale che il vettore $\underline{v}$ sia parallelo e concorde con il semiasse positivo delle x

[2] ruoto la figura:



Detto P il punto che rappresenta $\underline{v}$

Q " " $\underline{w}$

H il piede della perpendicolare per Q all'asse x

Allora
$$\underline{v} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |OP| \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\underline{w} = \begin{bmatrix} x_Q \\ \ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |OH| \\ |QH| \end{bmatrix}$$

Calcolo $\underline{v}^T \underline{w}$:

$$\underline{v}^T \cdot \underline{w} = \begin{bmatrix} |OP| & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |OH| \\ |QH| \end{bmatrix} = |OP| \cdot |OH|$$

Siccome $|OP| = \|\underline{v}\|_2$ e

$$|OH| = |OQ| \cdot \cos\alpha = \|\underline{w}\|_2 \cdot \cos\alpha$$

$|OQ| = \|\underline{w}\|_2$

Ottengo:
$$\boxed{\underline{v}^T \cdot \underline{w} = \|\underline{v}\|_2 \cdot \|\underline{w}\|_2 \cdot \cos\alpha .}$$

Da $\underline{v} \neq \underline{0}$ segue $\|\underline{v}\|_2 \neq 0$ e da $\underline{w} \neq \underline{0}$ segue $\|\underline{w}\|_2 \neq 0$

per cui, dividendo per $\|\underline{v}\|_2 \cdot \|\underline{w}\|_2$ concludo

$\boxed{\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2 \text{ con } \underline{v} \neq \underline{0} \neq \underline{w}}$

P rappresenta $\underline{v}$

Q " $\underline{w}$

α = angolo tra OP ed OQ

lo chiamo ANGOLO TRA $\underline{v}$ E $\underline{w}$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{\underline{v}^T \cdot \underline{w}}{\|\underline{v}\|_2 \cdot \|\underline{w}\|_2}}$$

$= \cos \widehat{\underline{v}\underline{w}}$ (indico α con $\widehat{\underline{v}\underline{w}}$)

Voglio generalizzare queste formule.

Generalizzo $\|\cdot\|_2$ con "UNA NORMA" $\|\cdot\|$ (in realtà, vedrò, NON con una NORMA "QUALUNQUE")

Generalizzo la funzione

$$(*) \qquad (\underline{v}, \underline{w}) = \underline{v}^T \underline{w}$$

con una funzione che soddisfa alcune condizioni che sono proprietà di $(*)$. Chiamerò una tale funzione "PRODOTTO SCALARE". Più precisamente:

Def Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Si chiama **PRODOTTO SCALARE (O PRODOTTO INTERNO)** su V ogni funzione $(\cdot|\cdot): V \times V \longrightarrow K$

che soddisfa le seguenti condizioni:

$\boxed{1}$ $(\underline{v}|\underline{w}) = \overline{(\underline{w}|\underline{v})}$, $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

è il coniugato

$\boxed{2}$ $(\underline{v}|\alpha\underline{w} + \beta\underline{z}) = \alpha(\underline{v}|\underline{w}) + \beta(\underline{v}|\underline{z})$

$\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in K$

anche quando $K = \mathbb{C}$

$\boxed{3}$ $(\underline{v}|\underline{v}) \in \mathbb{R}_{>0}$ se $\underline{v} \neq \underline{0}$ e $(\underline{0}|\underline{0}) = 0$.

$\boxed{\text{NB 1}}$ se $K = \mathbb{R}$ si possono togliere i coniugati nella condizione $\boxed{1}$

$\boxed{\text{NB 2}}$ $\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow (\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}|\underline{w}) = \bar{\alpha}(\underline{u}|\underline{w}) + \bar{\beta}(\underline{v}|\underline{w})$

$\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in K$

ESEMPIO

IL PRODOTTO SCALARE CANONICO SU $\mathbb{C}^n$

$$(\cdot|\cdot): \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\underline{v}, \underline{w}) \longmapsto \underline{v}^H \underline{w}$$

IL PRODOTTO SCALARE CANONICO SU $\mathbb{R}^n$

$$(\cdot|\cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\underline{v}, \underline{w}) \longmapsto \underline{v}^T \underline{w}$$

Calcolo:

$$\left(\begin{bmatrix} 1+3i \\ 7 \\ i \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2-i \\ 2i \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1+3i \\ 7 \\ i \end{bmatrix}^H \cdot \begin{bmatrix} 2-i \\ 2i \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{1+3i} & \overline{7} & \overline{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-i \\ 2i \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-3i & 7 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-i \\ 2i \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$= (1-3i)(2-i) + 7 \cdot 2i - i \cdot 4 =$$

$$= 2 - i - 6i - 3 + 14i - 4i =$$

$$= -1 + 3i$$

Def Uno spazio vettoriale V su cui sia definito un prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$ si dice uno SPAZIO METRICO

OGNI PRODOTTO SCALARE DEFINISCE UNA NORMA:

Siano V uno spazio metrico su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$(\cdot|\cdot)$ il prodotto scalare definito su V

$$(\cdot|\cdot) : V \times V \longrightarrow K$$

La funzione $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

definita da: $\|\underline{v}\| \underset{def}{=} \sqrt{(\underline{v}|\underline{v})} \quad \forall \underline{v} \in V$

è una norma su V. Si chiama LA NORMA INDOTTA DAL PRODOTTO SCALARE $(\cdot|\cdot)$.

Chi è la norma indotta dal prodotto scalare canonico di $\mathbb{C}^n$?

$V = \mathbb{C}^n$
$K = \mathbb{C}$

$$(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

definizione del prodotto scalare canonico

$$(\underline{v}, \underline{w}) \longmapsto (\underline{v}|\underline{w}) = \underline{v}^H \underline{w}$$

$\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

norma indotta

def $\|\cdot\|_2$

$\forall \underline{v} \in \mathbb{C}^n \quad \|\underline{v}\| = \sqrt{(\underline{v}|\underline{v})} = \sqrt{\underline{v}^H \underline{v}} = \|\underline{v}\|_2$

def di norma indotta

$(\cdot|\cdot)$ è qui il prodotto scalare canonico, per cui $(\underline{v}|\underline{v}) = \underline{v}^H\underline{v}$

LA NORMA INDOTTA DAL PRODOTTO SCALARE CANONICO DI $\mathbb{C}^n$ E' LA NORMA EUCLIDEA

$\boxed{\text{N.B.}}$ NON TUTTE LE NORME SONO INDOTTE DA QUALCHE PRODOTTO SCALARE.

Ad esempio, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ non sono indotte da alcun prodotto scalare.

PER CASA: ESERCIZI 1 e 2 (file: I19casaT11.pdf)

ANGOLO TRA DUE VETTORI IN UNO SPAZIO METRICO

Sono V uno spazio vettoriale metrico su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$(\cdot|\cdot)$ il prodotto scalare di V

$\|\cdot\|$ la norma indotta dal prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$

Avevo: $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$

$(\cdot|\cdot)$ = prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$

$(\underline{v}|\underline{w}) = \underline{v}^T\underline{w}$

$\|\cdot\|_2$ norma indotta dal prodotto scalare canonico $= \|\cdot\|_2$

ho visto

$\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$
$\underline{v} \neq \underline{0} \neq \underline{w}$ $\Rightarrow$ $\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \dfrac{\underline{v}^T\underline{w}}{\|\underline{v}\|_2 \|\underline{w}\|_2}$

allora: $\underline{v},\underline{w}\in V$, $\underline{v}\neq\underline{0}\neq\underline{w}$

$$\cos\widehat{\underline{v}\,\underline{w}} = \frac{(\underline{v}|\underline{w})}{\|\underline{v}\|\cdot\|\underline{w}\|}$$

INSIEMI DI VETTORI ORTOGONALI ED INSIEMI DI VETTORI ORTONORMALI

Se $\underline{v},\underline{w}\in\mathbb{R}^2$ con $\underline{v}\neq\underline{0}\neq\underline{w}$, allora

$\left[\underline{v}\text{ è ORTOGONALE a }\underline{w}\ (\text{scrivo }\underline{v}\perp\underline{w})\right]\iff$

$\left[\widehat{\underline{v}\,\underline{w}}=90^\circ \text{ oppure } \widehat{\underline{v}\,\underline{w}}=270^\circ\right]\iff\cos\widehat{\underline{v}\,\underline{w}}=0\implies\underline{v}^T\underline{w}=0$

$$\cos\widehat{\underline{v}\,\underline{w}}=\frac{\underline{v}^T\underline{w}}{\|\underline{v}\|_2\cdot\|\underline{w}\|_2}$$

Sia V uno spazio metrico su K

$(\cdot|\cdot)$ il prodotto scalare di V

$\|\cdot\|$ la norma indotta dal prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$

Se $\underline{v},\underline{w}\in V$, $\underline{v}\neq\underline{0}\neq\underline{w}$

$\left[\underline{v}\text{ è ortogonale a }\underline{w}\right]\iff\cos\widehat{\underline{v}\,\underline{w}}=0\iff(\underline{v}|\underline{w})=0$

scrivo $\underline{v}\perp\underline{w}$

$$\cos\widehat{\underline{v}\,\underline{w}}=\frac{(\underline{v}|\underline{w})}{\|\underline{v}\|\cdot\|\underline{w}\|}$$

$\boxed{\text{NB}}$ Dalla definizione di prodotto scalare segue che

$$(\underline{0}|\underline{v})=0=(\underline{v}|\underline{0})\quad\forall\underline{v}\in V$$

(perché $\underline{0}=\underline{0}+\underline{0}$ e $(\underline{v}|\underline{0})=(\underline{v}|\underline{0}+\underline{0})=(\underline{v}|\underline{0})+(\underline{v}|\underline{0})$
e analogamente $(\underline{0}|\underline{v})=(\underline{0}+\underline{0}|\underline{v})=(\underline{0}|\underline{v})+(\underline{0}|\underline{v})$)

DIRÒ CHE $\underline{v},\underline{w}\in V$ SONO ORTOGONALI (E SCRIVERÒ $\underline{v}\perp\underline{w}$) SE $(\underline{v}|\underline{w})=0$. Per cui $\underline{0}\perp\underline{v}\ \forall\underline{v}\in V$

Def Un INSIEME di vettori $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_k\}$ di V_2 si dice ORTOGONALE se i suoi vettori sono a due a due ortogonali, cioè

se $\underline{w}_i \perp \underline{w}_j \quad \forall i \neq j$

ossia se

$$(\underline{w}_i | \underline{w}_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

Se $\underline{v} \in V$ con $\underline{v} \neq \underline{0}$, NORMALIZZARE $\underline{v}$ vuol dire considerare il vettore

$$\underline{z} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v} \quad \text{al posto di } \underline{v}$$

N.B. se $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora $\|\underline{v}\| \neq 0$ ed esiste $\frac{1}{\|\underline{v}\|}$

$\boxed{\text{NB}}$ $\|\underline{z}\| = 1$

$$\|\underline{v}\| \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \frac{1}{\|\underline{v}\|} \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \left|\frac{1}{\|\underline{v}\|}\right| = \frac{1}{\|\underline{v}\|}$$

Infatti:

$$\|\underline{z}\| \underset{\uparrow}{=} \left\| \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v} \right\| = \left| \frac{1}{\|\underline{v}\|} \right| \cdot \|\underline{v}\| = \frac{1}{\cancel{\|\underline{v}\|}} \cdot \cancel{\|\underline{v}\|} = 1$$

$\underline{z} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v}$

$\|\alpha \underline{v}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{v}\| \quad \forall \alpha$

qua ho $\alpha = \frac{1}{\|\underline{v}\|}$