S. PARMEGGIANI 23/5/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

IL COMPLEMENTO ORTOGONALE DI UN SOTTOSPAZIO DI UNO SPAZIO VETTORIALE METRICO

Siano V uno spazio vettoriale metrico
$(\cdot|\cdot)$ il prodotto scalare di V

Abbiamo visto (LEZIONE 24) che dati $\underline{v}, \underline{w} \in V$

$$\underline{v} \perp \underline{w} \iff (\underline{v}|\underline{w}) = 0$$

PARENTESI

1 Abbiamo visto ieri che se $V = \mathbb{R}^2$

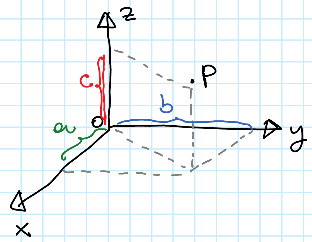
① ogni vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ è rappresentato in Oxy da un punto
② ogni sottospazio di dimensione 1 di $\mathbb{R}^2$ è rappresentato in Oxy da una retta passante per O

---

2 $V = \mathbb{R}^3$ Analogamente

se $\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{v}$ è rappresentato in $Oxyz$ dal punto P con

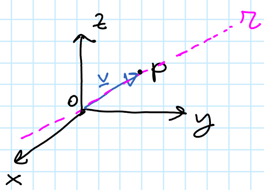
$x_P = a$
$y_P = b$
$z_P = c$



① i vettori $\underline{v}$ corrispondono a punti in $Oxyz$

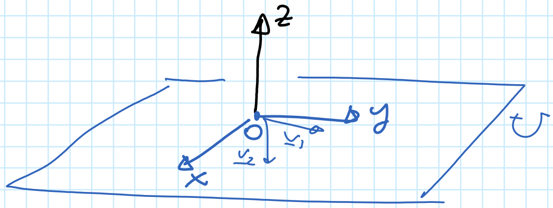
② i sottospazi U di dimensione 1 sono del tipo $U = \langle \underline{v} \rangle$ con $\underline{v} \neq \underline{0}$ (allora $\{\underline{v}\}$ è una base di U e $\dim U$ = numero degli elementi di una base di U = 1)

$U = \langle \underline{v} \rangle = \{\alpha \underline{v} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ è rappresentato in $Oxyz$ dalla retta individuata dal vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$:
se $\underline{v}$ è rappresentato dal punto P, allora
$\langle \underline{v} \rangle$ // dalla retta r per O e per P



③ i sottospazi U di dimensione 2 sono del tipo $U = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$
con $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ L.I. e sono rappresentati in $Oxyz$
da piani contenenti O

scelgo un riferimento con Oxy su U →



$\boxed{3}$ $V = \mathbb{R}^2$, $(\cdot|\cdot)$ il prodotto scalare canonico: $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$

$(\underline{v}|\underline{w}) = \underline{v}^H \underline{w} = \underline{v}^T \underline{w}$

$\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$

$U \leq V$ con $\dim U = 1$

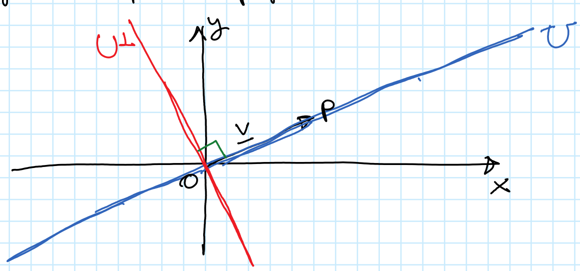
$\Longrightarrow$ $U = \langle \underline{v} \rangle$ con $\underline{v} \neq \underline{0}$ ed U è rappresentato in Oxy
PUNTO $\boxed{1}$ dalla retta per O e per P (dove P è il punto che rappresenta $\underline{v}$)

IL COMPLEMENTO ORTOGONALE DI U IN V = $U^\perp$ =

si indica con il simbolo

$= \{\underline{w} \in V \mid \underline{w} \perp \underline{u} \ \ \forall \underline{u} \in U\}$

(SE U HA DIMENSIONE 1 IN $V = \mathbb{R}^2$) $U^\perp$ è rappresentato dalla retta passante per O e perpendicolare alla retta che rappresenta U:

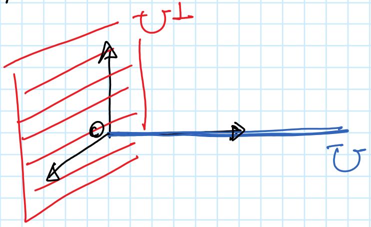


$\boxed{4}$ $V=\mathbb{R}^3$, $(\cdot|\cdot)$ il prodotto scalare canonico

$U \leq V$

$\dim U = 1$

$\Downarrow$

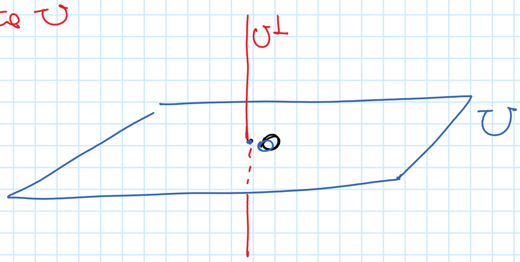


$U^\perp = \{\underline{w} \in V \mid \underline{w} \perp \underline{u}, \forall \underline{u} \in U\}$ è rappresentato dal piano per O perpendicolare alla retta che rappresenta U

$U \leq V$

$\dim U = 2$

$\Downarrow$



$U^\perp = \{\underline{w} \in V \mid \underline{w} \perp \underline{u}, \forall \underline{u} \in U\}$ è rappresentato dalla retta per O perpendicolare al piano che rappresenta U

CHIUSA PARENTESI

Siano V uno spazio metrico

$(\cdot|\cdot)$ il prodotto scalare di V

$\|\cdot\|$ la norma indotta da $(\cdot|\cdot)$

$U \leq V$ SOTTOSPAZIO

IL COMPLEMENTO ORTOGONALE DI U IN V È

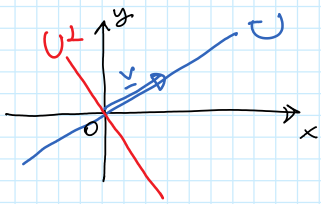
$$U^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} \perp \underline{u} \quad \forall \underline{u} \in U\} = \{\underline{v} \in V \mid (\underline{u}|\underline{v}) = 0 \quad \forall \underline{u} \in U\}$$

$\boxed{NB\,1}$ $U^\perp$ è un SOTTOSPAZIO di V

$\boxed{NB\,2}$ Per calcolare $U^\perp$ è sufficiente trovare un insieme di generatori $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k\}$ di U:

$$U^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \underline{u}_i \perp \underline{v}, \quad i=1,\dots,k\} =$$
$$= \{\underline{v} \in V \mid (\underline{u}_i|\underline{v}) = 0, \ i=1,\dots,k\}$$

Ad esempio: se $V = \mathbb{R}^2$ ed $U = \langle \underline{v} \rangle$ allora $U^\perp = \{ \underline{w} \in \mathbb{R}^2 \mid (\underline{w} | \underline{v}) = 0 \}$



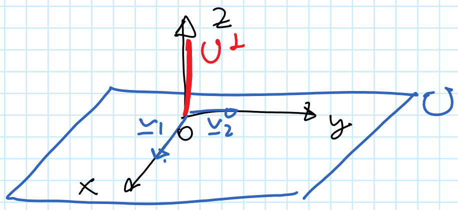
i vettori perpendicolari alla retta che rappresenta U sono i vettori perpendicolari al vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ (che genera U)

se $V = \mathbb{R}^3$ ed $U = \langle \overset{\underline{v}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} ; \overset{\underline{v}_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \rangle$ allora

$$U^\perp = \left\{ \underline{w} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \underline{w} \right) = 0 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \underline{w} \right) \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } [0\ 1\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$



$\boxed{\text{NB3}}$ PROPRIETA' DEL COMPLEMENTO ORTOGONALE

① $U \cap U^\perp = \{ \underline{0} \}$

Infatti:

$$\left. \begin{array}{l} U \text{ sottospazio di } V \Rightarrow \underline{0} \in U \\ U^\perp \quad '' \quad (\text{NB 1}) \Rightarrow \underline{0} \in U^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{0} \in U \cap U^\perp$$

viceversa: $\underline{u} \in U \cap U^\perp \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \in U \\ \underline{u} \in U^\perp \Rightarrow \underline{u} \text{ è } \perp \text{ ad ogni vettore di } U \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{u} \perp \underline{u} \Rightarrow (\underline{u} | \underline{u}) = 0 \Rightarrow \underline{u} = \underline{0}$
3° assioma dei prodotti scalari

② $V = U \oplus U^\perp$

Da ② si ottiene:

$$\boxed{\forall \underline{v} \in V \ \underset{\text{UNICO}}{\exists!\, \underline{u} \in U} \ \underset{\text{UNICO}}{\exists!\, \underline{w} \in U^\perp} \text{ TALI CHE } \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}}$$

Infatti: $V = U \oplus U^\perp \Rightarrow \begin{cases} V = U + U^\perp \\ U \cap U^\perp = \{\underline{0}\} \end{cases}$

Da $V = U + U^\perp$ segue che $\forall \underline{v} \in V \ \exists \underline{u} \in U \ \exists \underline{w} \in U^\perp$ t.c. $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

e da $U \cap U^\perp$ segue che $\underline{u}$ e $\underline{w}$ sono completamente individuati:

se $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ con $\underline{u} \in U$ e $\underline{w} \in U^\perp$

ed anche $\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{w}_1$ con $\underline{u}_1 \in U$ e $\underline{w}_1 \in U^\perp$

allora $\underline{u} + \underline{w} = \underline{u}_1 + \underline{w}_1 \Rightarrow \underline{u} - \underline{u}_1 = \underline{w}_1 - \underline{w}$

siccome $\underline{u}, \underline{u}_1 \in U$ ed U è un sottospazio allora $\underline{u} - \underline{u}_1 \in U$

siccome $\underline{w}, \underline{w}_1 \in U^\perp$ ed $U^\perp$ è un sottospazio (NB2) allora

$\underline{w}_1 - \underline{w} \in U^\perp$.

Dunque
$$\left.\begin{array}{l} \underline{u} - \underline{u}_1 \in U \\ \underline{u} - \underline{u}_1 = \underline{w}_1 - \underline{w} \\ \underline{w}_1 - \underline{w} \in U^\perp \\ U \cap U^\perp = \{\underline{0}\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{u} - \underline{u}_1 = \underline{0} \\ \underline{w}_1 - \underline{w} = \underline{0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{u}_1 = \underline{u} \\ \underline{w}_1 = \underline{w} \end{cases}$$

$\boxed{\text{NB4}}$ SE $V = \mathbb{R}^n$ o $V = \mathbb{C}^n$ CON IL PRODOTTO SCALARE CANONICO

$U = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k \rangle$, allora $\underset{m \times k}{A} = [\underline{u}_1 \underline{u}_2 \dots \underline{u}_k]$

è una matrice tale che $C(A) = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k \rangle = U$. Si può

provare che $C(A)^\perp = N(A^H)$ (e quindi, essendo $U = C(A)$ che $U^\perp = N(A^H)$)

LA PROIEZIONE ORTOGONALE ED IL SUO CALCOLO

Siano V uno spazio vettoriale metrico

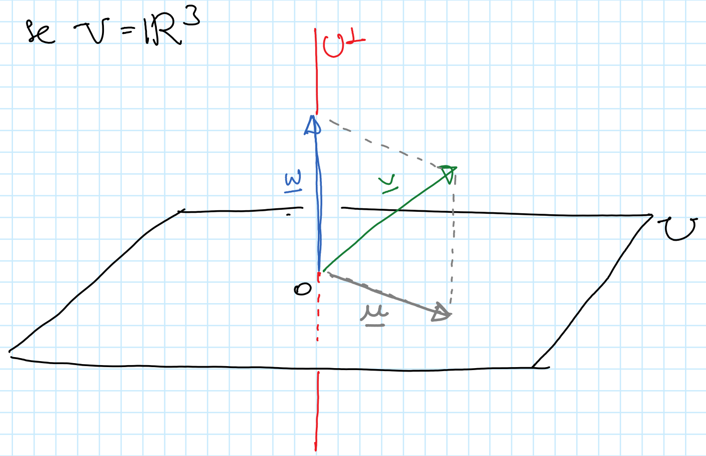
$(\cdot|\cdot)$ il prodotto scalare di V

$U \leq V$

Abbiamo visto che $V = U \oplus U^{\perp}$ comporta:

$$\forall \underline{v} \in V \ \exists! \underline{u} \in U \ \exists! \underline{w} \in U^{\perp} \text{ t.c. } \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$$

Esempio: se $V = \mathbb{R}^3$



$\underline{u} = P_U(\underline{v})$ = PROIEZIONE ORTOGONALE DI $\underline{v}$ SU U

CALCOLO DI $P_U(\underline{v})$:

$\boxed{1}$ Si trova una BASE ORTONORMALE di U:

$$\{\underline{u}_1^*, \underline{u}_2^*, \ldots, \underline{u}_k^*\}$$

$\boxed{2}$ $P_U(\underline{v}) = (\underline{u}_1^* | \underline{v}) \cdot \underline{u}_1^* + (\underline{u}_2^* | \underline{v}) \cdot \underline{u}_2^* + \ldots + (\underline{u}_k^* | \underline{v}) \cdot \underline{u}_k^*$

ESERCIZIO TIPO 15 (file: I19tipo15.pdf)

PER CASA: ESERCIZI 5, 6, 7, 8 (file: I19casaT11.pdf)