S.PARMEGGIANI 24/5/2019

I19L27

venerdì 24 maggio 2019 08:30

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di laurea: Informatica

MATRICE DI PROIEZIONE

Sia $V = \mathbb{C}^n$ oppure $V = \mathbb{R}^n$

$(\cdot|\cdot)$ il PRODOTTO SCALARE CANONICO su V ← $(\underline{u}|\underline{v}) = \underline{u}^H \underline{v}$ $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$

Se $\underline{v} \in V$, la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su U è (LEZIONE 26)

$$P_U(\underline{v}) = (\underline{u}_1^*|\underline{v})\underline{u}_1^* + (\underline{u}_2^*|\underline{v})\underline{u}_2^* + \dots + (\underline{u}_k^*|\underline{v})\underline{u}_k^*$$

dove $\{\underline{u}_1^*, \underline{u}_2^*, \dots, \underline{u}_k^*\}$ è una $\boxed{\text{BASE ORTONORMALE}}$ DI U

se $\underset{n\times k}{Q} = [\underline{u}_1^* \; \underline{u}_2^* \dots \underline{u}_k^*]$ allora Q^H è $k\times n$

e si può provare che

la matrice $\underset{n\times n}{P} = QQ^H$ È TALE CHE

$$P\cdot\underline{v} = P_U(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$$

P si chiama LA MATRICE DI PROIEZIONE DI V SU U

NB1 Una matrice $\underset{n\times k}{Q} = [\underline{u}_1^* \; \underline{u}_2^* \dots \underline{u}_k^*]$ è "a colonne ortonormali"
(i.e. le sue colonne sono a due a due ortogonali ed inoltre ciascuna d'esse ha norma euclidea uguale ad 1) $\iff \underset{k\times n}{Q^H}\underset{n\times k}{Q} = I_k$ ← matrice identica di ordine k

Infatti:

$\{\underline{u}_1^*, \underline{u}_2^*, \dots, \underline{u}_k^*\}$ è un insieme ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) $\iff$
$$\begin{cases} (\underline{u}_i^*)^H \underline{u}_j^* = 0 & \text{se } i \neq j \\ (\underline{u}_i^*)^H \underline{u}_i^* = 1 & \forall i \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad (\underline{u}_i^*)^H \underline{u}_j^* = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

colonne di Q

se $Q = [\underline{u}_1^* \; \underline{u}_2^* \cdots \underline{u}_k^*]$ allora

$$Q^H = \begin{bmatrix} (\underline{u}_1^*)^H \\ (\underline{u}_2^*)^H \\ \vdots \\ (\underline{u}_k^*)^H \end{bmatrix}$$

righe di Q^H

Dal momento che

$$(\underline{u}_i^*)^H \underline{u}_j^* = \left(\text{i-esima riga di } Q^H\right) \cdot \left(\text{j-esima colonna di } Q\right) =$$

$$= \text{l'elemento di posto } (i,j) \text{ in } Q^H Q$$

Concludendo:

$$\underset{n \times k}{Q} = [\underline{u}_1^* \; \underline{u}_2^* \cdots \underline{u}_k^*] \text{ è a colonne ortonormali} \Longleftrightarrow \underset{k \times n \;\; n \times k}{Q^H Q} = I_k$$

$\boxed{\text{NB2}}$ Sia P una matrice di proiezione, ossia sia $P = QQ^H$ con Q "a colonne ortonormali". Allora

① $P^H = P$ e ② $P^2 = P$

Infatti:

① $P^H \underset{P=QQ^H}{=} (QQ^H)^H = (Q^H)^H \cdot Q^H \underset{\boxed{(Q^H)^H = Q}}{=} QQ^H \underset{P=QQ^H}{=} P$

l'H-trasposto di un prodotto è il prodotto delle H-trasposte in ORDINE SCAMBIATO

② $P^2 = P \cdot P \underset{P=QQ^H}{=} (QQ^H)(QQ^H) = Q(Q^HQ)Q^H \underset{\text{NB1}}{=}$

$= Q \cdot I \cdot Q^H = QQ^H \underset{P=QQ^H}{=} P$

ESEMPIO $\boxed{1}$ Sia $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(ESERCIZIO TIPO 15) Trovare la matrice di proiezione di $\mathbb{C}^3$ su W.

$P = QQ^H$ dove le colonne di Q sono gli elementi di una base ortonormale di W.

Nell'ESERCIZIO TIPO 15 (PUNTO (b)) abbiamo trovato una base ortonormale di W: $\mathcal{B} = \left\{ \underline{u}_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \underline{u}_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Prendendo $Q = [\underline{u}_1^* \ \ \underline{u}_2^*] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

trovo $Q^H = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ per cui

$$\underset{3\times 3}{P} = QQ^H = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

In particolare, se $\underline{v} = \begin{bmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (come nell'ESERCIZIO TIPO 15)

si ha $P_W(\underline{v}) = P \cdot \underline{v} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2}i - \frac{1}{2}i \\ 2 \\ -\frac{5}{2} + 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{NB 3}}$ Si può provare che se P è la matrice di proiezione su U allora la matrice di proiezione su $U^\perp$ è $I_n - P$

ESEMPIO $\boxed{2}$ Sia $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(ESERCIZIO TIPO 15).

Qual è la matrice di proiezione su $W^\perp$?

1° MODO Calcolo $W^\perp$ (ESERCIZIO 15 PUNTO (a))

$$W^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} ih \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \middle| h \in \mathbb{C} \right\}$$

Trovo una BASE ORTONORMALE di $W^\perp$

$\left\{ \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base qualunque di $W^\perp$.
E' già ortogonale (ha un solo elemento)
la "normalizzo"

$$\left\| \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{[-i \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $W^\perp$

La matrice di proiezione su $W^\perp$ è

$$QQ^H = \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Q ha come colonne gli elementi di una base ortonormale di $W^\perp$

2° MODO Se già conosco la matrice di proiezione P su W

(ESEMPIO $\boxed{1}$) $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ allora calcolo la

matrice di proiezione su $W^\perp$ come $I-P$:

$$I-P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-1/2) & 0 & i/2 \\ 0 & (1-1) & 0 \\ & 0 & (1-1/2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

PER CASA: ESERCIZIO 9 (file: I19casaT11.pdf)

CALCOLO DI DETERMINANTI

Sia A una **MATRICE QUADRATA** $n \times n$.

Il **DETERMINANTE DI A** è un numero che dipende da A.
Si indica con il simbolo **det A** oppure **Det A**

CASO $n=1$ $\quad A = [a_{11}] \Rightarrow \operatorname{Det} A = a_{11}$

CASO $n=2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$

ESEMPIO $\quad \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4-6 = -2$

SCRIVO $a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$ NEL SEGUENTE MODO:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$$

$$= a_{11}\cdot(-1)^{(1+1)} \det[a_{22}] + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\det[a_{21}] =$$

$$= a_{11}\cdot(-1)^{(\text{somma degli indici di } a_{11})}\cdot\left[\text{determinante della matrice che si ottiene da A sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{11}\right] + a_{12}\cdot(-1)^{(\text{somma degli indici di } a_{12})}\left[\text{determinante della matrice che si ottiene da A sopprimendo la riga e le colonne in cui si trova } a_{12}\right]$$

chiamiamo C_{11} = (la matrice che si ottiene da A sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova a_{11}) e C_{12} = (la matrice che si ottiene da A sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova a_{12})

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{bmatrix} \rightsquigarrow C_{11} = [a_{22}] \qquad A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} \end{bmatrix} \rightsquigarrow C_{12} = [a_{21}]$$

Dunque $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\det C_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\det C_{12}$

Poniamo

$A_{11} = (-1)^{1+1}\det C_{11}$ — COFATTORE DI POSTO (1,1) IN A

$A_{12} = (-1)^{1+2}\det C_{12}$ — COFATTORE DI POSTO (1,2) IN A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = \underbrace{[a_{11} \;\; a_{12}]}_{1^a \text{ RIGA DI } A} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix}}_{\text{COLONNA DEI COFATTORI DEI POSTI DELLA } 1^a \text{ RIGA DI } A}$$

prodotto di un vettore riga per un vettore colonna

COLONNA DEI COFATTORI DEI POSTI DELLA 1^a RIGA DI A (posto (1,1) e posto (1,2))

CASO $n=3$ $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

la 1^a riga di A è $[a_{11} \;\; a_{12} \;\; a_{13}]$

la colonna dei cofattori dei posti della 1^a riga di A è $\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{bmatrix}$

(posti (1,1), (1,2) ed (1,3))

dove $A_{11} = (-1)^{1+1} \det C_{11}$

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow C_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \det C_{12}$

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow C_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \det C_{13}$

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} \Rightarrow C_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}] \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{bmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{3 \quad -2 \quad 1} \\ 0 \quad 1 \quad 4 \\ 2 \quad 6 \quad 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = [3 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{bmatrix} = 3A_{11} - 2A_{12} + A_{13}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 - 4 \cdot 6 = 3 - 24 = -21$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -\left(0 \cdot 3 - 4 \cdot 2\right) = -(-8) = 8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 0 \cdot 6 - 1 \cdot 2 = -2$$

$$\Rightarrow \det A = 3 \cdot (-21) - 2 \cdot 8 - 2 = -63 - 16 - 2 = -81$$

CASO $n = 4$ .....

$$\det \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad -5 \quad 0 \quad 3} \\ 6 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \\ -2 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \\ -1 \quad 7 \quad 5 \quad 1 \end{bmatrix} = [1 \quad -5 \quad 0 \quad 3] \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{14} \end{bmatrix} =$$

$$= A_{11} - 5A_{12} + \cancel{0 \cdot A_{13}} + 3A_{14} = A_{11} - 5A_{12} + 3A_{14}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \operatorname{Det} \begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 0 \quad 4} \\ 0 \quad 0 \quad 2 \\ 7 \quad 5 \quad 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 0 \quad 4] \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{13} \end{bmatrix} = 2B_{11} + \cancel{0 \cdot B_{12}} + 4B_{13}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

i cofattori della matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

$$= 2 (-1)^{1+1} \operatorname{Det} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \operatorname{Det} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (0-10) + 4 \cdot 1 \cdot (0-0) =$$

$$= 2 \cdot (-10) = -20$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \operatorname{Det} \begin{bmatrix} \boxed{6 \quad 0 \quad 4} \\ -2 \quad 0 \quad 2 \\ -1 \quad 5 \quad 1 \end{bmatrix} = - \left([6 \quad 0 \quad 4] \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{13} \end{bmatrix} \right) =$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

i cofattori della matrice $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

$$= - \left(6 \cdot B_{11} + \cancel{0 \cdot B_{12}} + 4 \cdot B_{13} \right) =$$

$$= -6B_{11} - 4B_{13} =$$

$$= -6 \, (-1)^{1+1} \operatorname{Det} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - 4 \cdot (-1)^{1+3} \operatorname{Det} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= -6 \, (0-10) - 4(-10-0) =$$

$$= 60 + 40 = 100$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \operatorname{Det} \begin{bmatrix} \boxed{6 \quad 2 \quad 0} \\ -2 \quad 0 \quad 0 \\ -1 \quad 7 \quad 5 \end{bmatrix} = - \left([6 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{13} \end{bmatrix} \right) =$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

i cofattori della matrice $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

$$= - \left(6 \cdot B_{11} + 2 \cdot B_{12} + \cancel{0 \cdot B_{13}} \right) =$$

$$= -6B_{11} - 2B_{12}$$

$$= -6 \cdot (-1)^{1+1} \operatorname{Det} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} - 2 \cdot (-1)^{1+2} \operatorname{Det} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= -6 \cdot (0-0) - 2 \cdot (-1) \cdot (-10-0) =$$

$$= -2 \cdot (-1) \cdot (-10) = -20$$

Dunque $\operatorname{Det} A = A_{11} - 5 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{14} =$

$$= -20 - 5 \cdot 100 + 3 \cdot (-20) =$$

$$= -20 - 500 - 60 = -580$$

In generale:

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$

Sia C_{ij} = la matrice che si ottiene da A sopprimendo la i-esima riga di A e la j-esima colonna di A

Dunque C_{ij} è $(n-1) \times (n-1)$.

Chiamiamo COFATTORE DI POSTO (i,j) DI A il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \operatorname{Det} C_{ij}$$

chiamiamo DETERMINANTE DI A il numero

$$\operatorname{Det} A = [a_{11}\ a_{12} \cdots\ a_{1n}] \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{1n} \end{bmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

TEOREMA: Sia $A = (a_{ij})$ $n \times n$.

Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ si ha che

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

per cui $\forall i \in \{1, .., n\}$

$$\operatorname{Det} A = [a_{i1}\ a_{i2} \cdots\ a_{in}] \begin{bmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ \vdots \\ A_{in} \end{bmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

Questa espressione del determinante di A si chiama LO SVILUPPO DI LAPLACE DEL DETERMINANTE DI A RISPETTO ALLA i-ESIMA RIGA DI A

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo calcolato det A sviluppato rispetto alla 1ª riga.

È più conveniente svilupparlo rispetto alla 3ª riga

(che contiene più zeri)

posto (3,1) in A   posto (3,2) in A   posto (3,3) in A   posto (3,4) in A

$$\operatorname{Det} A = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ \boxed{-2 \quad 0 \quad 0 \quad 2} \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = [-2 \quad 0 \quad 0 \quad 2]\begin{bmatrix} A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \\ A_{34} \end{bmatrix} =$$

$$= -2A_{31} + \cancel{0 \cdot A_{32}} + \cancel{0 \cdot A_{33}} + 2 \cdot A_{34} = -2A_{31} + 2A_{34}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \operatorname{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ \boxed{2 \quad 0 \quad 4} \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

posto (2,3)

lo sviluppo rispetto alla 2ª riga

posto (2,1)   posto (2,2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= [2 \quad 0 \quad 4]\begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \\ B_{23} \end{bmatrix} = 2 \cdot B_{21} + \cancel{0 \cdot B_{22}} + 4B_{23} = 2B_{21} + 4B_{23} =$$

i cofattori della matrice $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ per calcolare B_{21} $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ per calcolare B_{23} $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$$= 2(-1)^{2+1} \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{2+3} \operatorname{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1)(0-15) + 4(-1)(-25) = 2(-1)(-15) + 4(-1)(-25) =$$

$$= 30 + 100 = 130$$

posto (2,2) posto (2,3)

$$A_{34} = (-1)^{3+4}\det\begin{pmatrix}1&-5&0\\6&2&0\\-1&7&5\end{pmatrix} = -\left(\det\begin{pmatrix}1&-5&0\\ \boxed{6\quad 2\quad 0}\\-1&7&5\end{pmatrix}\right) =$$

posto (2,1)

sviluppo rispetto alla 2^a riga

$$A = \begin{pmatrix}1&-5&0&3\\6&2&0&4\\-2&0&0&2\\-1&7&5&1\end{pmatrix}$$

$$= -\left[\begin{bmatrix}6&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{21}\\B_{22}\\B_{23}\end{bmatrix}\right] = -\left(6B_{21} + 2B_{22} + 0\cancel{B_{23}}\right) = -6B_{21} - 2B_{22} =$$

i cofattori di $\begin{pmatrix}-1&5&0\\6&2&0\\-1&7&5\end{pmatrix}$

$$= -6(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}-5&0\\7&5\end{pmatrix} - 2(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix}1&0\\-1&5\end{pmatrix} = -6(-1)(-25) - 2\cdot 5$$

$$= -150 - 10 = -160$$

$\begin{pmatrix}1&-5&0\\6&2&0\\-1&7&5\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-5&0\\7&5\end{pmatrix}$ per calcolare B_{21}, $\begin{pmatrix}1&-5&0\\6&2&0\\-1&7&5\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0\\-1&5\end{pmatrix}$ per calcolare B_{22}

$$\Rightarrow \det A = -2A_{31} + 2A_{34} = -2\cdot 130 + 2(-160) =$$

$$= -260 - 320 = -580$$