S. PARMEGGIANI 28/5/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

TEOREMA $A=(a_{ij})$ $n\times n$

(la j-esima colonna di A è: $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$)

Per ogni $j \in \{1,\dots,n\}$ si ha che

$$\det A = \underbrace{[a_{1j}\ a_{2j}\ a_{3j}\ \cdots\ a_{nj}]}_{\text{LA TRASPOSTA DELLA } j\text{-ESIMA COLONNA DI } A} \begin{bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ A_{3j} \\ \vdots \\ A_{nj} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

Questa espressione del determinante di A si chiama LO SVILUPPO DEL DETERMINANTE DI A RISPETTO ALLA j-ESIMA COLONNA DI A

ESEMPIO $\boxed{2}$ Riprendiamo la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ dell'ESEMPIO 1

e calcoliamo il suo determinante sviluppandolo rispetto alla 3^a colonna (che contiene 3 zeri!)

POSTO (1,3) POSTO (2,3)

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 5] \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \\ A_{43} \end{bmatrix} = \cancel{0\cdot A_{13}} + \cancel{0\cdot A_{23}} + \cancel{0\cdot A_{33}} + 5\cdot A_{43} =$$

POSTO (3,3) POSTO (4,3)

$$= 5\cdot(-1)^{4+3}\det\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 5\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

posto (1,2) POSTO (2,2) POSTO (3,2)

sviluppo il determinante rispetto alla 2^a colonna

$$= -5\left([-5\ \ 2\ \ 0]\begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \\ B_{32} \end{bmatrix}\right) = -5\left(-5\cdot B_{12} + 2\cdot B_{22} + \cancel{0\cdot B_{32}}\right) =$$

cofattori della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c|cc} \cancel{1} & \cancel{-5} & \cancel{3} \\ 6 & 2 & 4 \\ - & & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ - & 2 \end{pmatrix}$$

B_{12}

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

PER CALCOLARE B_{22}

$= 25\, B_{12} - 10\, B_{22} =$

$= 25\,(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - 10\,(-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} =$

$= 25 \cdot (-1)\,(12+8) - 10\,(2+6) =$

$= 25 \cdot (-1) \cdot 20 - 10 \cdot 8 =$

$= -500 - 80 = -580$

PER CASA: ESERCIZIO 1 (file: I19caseT12.pdf)

PROPRIETA' DEL DETERMINANTE

Siano A, B matrici complesse $n \times n$. Allora

$\boxed{1}$ $\det(\overline{A}) = \overline{\det A}$ — IL DETERMINANTE DELLA CONIUGATA DI A È IL CONIUGATO DEL DETERMINANTE DI A

$\boxed{2}$ $\det(A^T) = \det A$ — IL DETERMINANTE DELLA TRASPOSTA DI A È UGUALE AL DETERMINANTE DI A

N.B. $\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow \det(A^H) = \overline{\det A}$ — DETERMINANTE DELLA H-TRASPOSTA DI A È IL CONIUGATO DEL DETERMINANTE DI A

$\boxed{3}$ $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$ — IL DETERMINANTE DI UN PRODOTTO È IL PRODOTTO DEI DETERMINANTI

$\boxed{4}$ singolare $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

Inoltre, se A è non singolare allora $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

N.B. Avevamo già visto $\boxed{4}$ nel caso $n=2$ (LEZIONE 12)

Il determinante di una matrice triangolare superiore (o triangolare inferiore) è il prodotto degli elementi diagonali della matrice.

PROVIAMOLO NEL CASO CHE LA MATRICE SIA TRIANGOLARE SUPERIORE

Sia $T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & \mathbb{O} & & \ddots & \\ & & & & t_{nn} \end{bmatrix}$ triangolare superiore $n \times n$.

$$\det T = \det \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & 0 & & t_{nn} \end{bmatrix} = t_{11} \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} t_{22} & t_{23} & & \\ 0 & t_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & t_{nn} \end{bmatrix} =$$

SVILUPPO IL DETERMINANTE RISPETTO ALLA 1A COLONNA

$$= t_{11} \cdot t_{22} \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ \mathbb{O} & \ddots & t_{nn} \end{bmatrix} = \cdots\cdots =$$

$$= t_{11} \cdot t_{22} \cdot t_{33} \cdots \det \begin{bmatrix} t_{n-1\,n-1} & t_{n-1\,n} \\ 0 & t_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= t_{11} \cdot t_{22} \cdot t_{33} \cdots\cdots t_{n-1\,n-1} (-1)^{1+1} \det [t_{nn}] =$$

$$= t_{11} \cdot t_{22} \cdot t_{33} \cdots t_{n-1\,n-1} \cdot t_{nn} =$$ IL PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DIAGONALI DELLA MATRICE TRIANGOLARE

In particolare:

(una matrice diagonale è una particolare matrice triangolare)

Il determinante di una matrice diagonale è il prodotto degli elementi sulla diagonale della matrice:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & \mathbb{O} \\ & d_2 & \\ \mathbb{O} & & \ddots \; d_n \end{bmatrix} = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) \Rightarrow \det D = d_1 \cdot d_2 \cdots\cdots d_n$$

In particolare

Se $A = \alpha I_n$ allora $\det A = \det \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & & \mathbb{O} \\ & \alpha & \\ \mathbb{O} & & \alpha \end{bmatrix}}_{n \times n} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots\cdots \alpha}_{n \text{ fattori}} = \alpha^n$

MATRICE SCALARE DI ORDINE n

ESERCIZIO TIPO 16 (file: I19tipo16.pdf)

PER CASA: ESERCIZIO 2 (file: I19casaT12.pdf)

AUTOSISTEMI DI MATRICI COMPLESSE - MOLTEPLICITÀ ALGEBRICHE E GEOMETRICHE DEGLI AUTOVALORI

Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

L'applicazione lineare indotta da A (LEZIONE 21)

$$L_A : K^n \longrightarrow K^n$$
$$\underline{v} \longmapsto A\underline{v}$$

- NEL CASO IN CUI $A = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$ SIA UNA MATRICE DIAGONALE

è: $L_A\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 v_2 \\ \vdots \\ d_n v_n \end{bmatrix}$

- CASO IN CUI $A = \lambda I_n = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$ SIA UNA MATRICE SCALARE

è: $L_A\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

se $A = \lambda I_n \Rightarrow \quad A\underline{v} = \lambda \underline{v}$

PROBLEMA Se A è una qualunque matrice $n \times n$

$\overset{?}{\exists}\, \underline{v} \neq \underline{0}$ per cui $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$ per un opportuno scalare λ?

SE $\underline{v} = \underline{0}$ ALLORA $A\underline{v} = A \cdot \underline{0} = \underline{0} = \lambda \cdot \underline{0} = \lambda \underline{v}$
ADDIRITTURA PER QUALUNQUE SCALARE λ

Def: Uno scalare $\lambda \in K$ tale che esista $\underline{v} \in K^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ (!)
per cui

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

si dice UN AUTOVALORE di A.

L'insieme di tutti gli autovalori di A si dice LO SPETTRO di A e si indica con $\mathrm{Spec}(A)$.

N.B In $\mathbb{R}$ non è detto che A abbia autovalori.

ESEMPIO $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Mostro che A non ha autovalori reali.

Suppongo **PER ASSURDO** che esista $\lambda \in \mathbb{R}$, λ autovalore di A.

Allora $\exists \underline{v} \neq \underline{0}$ t.c. $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$

$A\underline{v} = \lambda \underline{v} \Longrightarrow \boxed{A(A\underline{v})} = \boxed{A(\lambda \underline{v})}$

premoltiplicando per A

$A(A\underline{v}) = AA\underline{v} = A^2\underline{v}$

e siccome $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

allora $A^2\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\underline{v} = -\underline{v}$

$A(\lambda\underline{v}) \overset{\lambda \text{ scalare}}{=} \lambda(A\underline{v}) \overset{A\underline{v}=\lambda\underline{v}}{=} \lambda(\lambda\underline{v}) = \lambda^2\underline{v}$

$\Longrightarrow -\underline{v} = \lambda^2\underline{v} \Longrightarrow (\lambda^2+1)\underline{v} = \underline{0} \Longrightarrow \lambda^2+1 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 = -1$ ↯

POICHÉ $\underline{v} \neq \underline{0}$

QUESTO CONTRADDICE L'IPOTESI CHE $\lambda \in \mathbb{R}$.

N.B. Con la stessa dimostrazione si prova:

se A è una matrice $n \times n$ tale che $A^2 = -I_n$

allora A non ha autovalori reali

NOTAZIONI: $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

A matrice $n \times n$ a coefficienti in K

$\mu \in K$

$$E_A(\mu) = \{\underline{v} \in K^n \mid A\underline{v} = \mu\underline{v}\}$$

Quindi SE $E_A(\mu) = \{\underline{0}\}$ ALLORA μ **NON È** UN AUTOVALORE DI A

SE $E_A(\mu) \neq \{\underline{0}\}$ ALLORA μ È UN AUTOVALORE DI A

Sia $\lambda \in K$, λ autovalore di A. Allora

$$E_A(\lambda) = \{\underline{v} \in K^n \mid A\underline{v} = \lambda \underline{v}\} = \{\underline{v} \in K^n \mid A\underline{v} - \lambda\underline{v} = \underline{0}\} =$$

$$= \{\underline{v} \in K^n \mid A\underline{v} - \lambda I_n \underline{v} = \underline{0}\} =$$

$$= \{\underline{v} \in K^n \mid (A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0}\} =$$

$$= N(A - \lambda I_n)$$

dunque $E_A(\lambda) = N(A - \lambda I_n)$. Ne segue:

$\boxed{1}$ $E_A(\lambda)$ è un SOTTOSPAZIO di K^n. Si chiama L'AUTOSPAZIO DI A RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ

$\boxed{2}$ $E_A(\lambda) \neq \{\underline{0}\}$ (λ è un autovalore di A). Ogni elemento NON NULLO di $E_A(\lambda)$ si chiama UN AUTOVETTORE DI A RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ

$\boxed{3}$ $d(\lambda)$ = LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DELL'AUTOVALORE λ (come autovalore di A) $= \dim E_A(\lambda)$

$$\dim E_A(\lambda) = \dim N(A - \lambda I_n) =$$

def di $E_A(\lambda)$

$$= \left(\begin{matrix}\text{numero delle}\\ \text{colonne di } A - \lambda I_n\end{matrix}\right) - rk(A - \lambda I_n) =$$

LEZIONE 19

$$= n - rk(A - \lambda I_n)$$

CALCOLO DI AUTOVALORI

Sia $A_{n\times n}$.

definizione di autovalore

λ è un autovalore di $A \iff E_A(\lambda) \neq \{\underline{0}\}$

$\iff N(A-\lambda I_n) \neq \{\underline{0}\}$

definizione di $E_A(\lambda)$

$\iff \dim N(A-\lambda I_n) \neq 0$

LEZIONE 18

$\iff rk(A-\lambda I_n) \lneq n$

$\boxed{\dim N(A-\lambda I_n) = n - rk(A-\lambda I_n)}$

$\iff A-\lambda I_n$ non ha inversa (è "singolare")

LEZIONE 11

$\iff \det(A-\lambda I_n)=0$

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

Dunque gli autovalori di A sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione

$$\det(A-x I_n)=0$$

"EQUAZIONE CARATTERISTICA DI A"

ossia tutte le radici (gli zeri) del polinomio

$$P_A(x) = \det(A-xI_n)$$

$P_A(x)$ si chiama IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI A

(x è un'indeterminata)

ESEMPIO Riprendiamo l'esempio $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Calcoliamo i suoi autovalori e basi dei suoi autospazi.

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = \det(A - xI_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix}\right) =$$
$$= (-x)^2 - (-1) =$$
$$= x^2 + 1$$

L'equazione $p_A(x) = 0$ è quindi $x^2+1=0$ le cui soluzioni sono:

$$\lambda_1 = i \quad e \quad \lambda_2 = -i$$

per cui $\operatorname{Spec} A = \{i, -i\}$

Calcolo gli autospazi $E_A(\lambda_1)$ ed $E_A(\lambda_2)$.

$$E_A(\lambda_1) = E_A(i) = N(A - iI_2) = N\left(\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{12}]{} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{21}(i)]{} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E_A(i) = N\left(\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \iff x_1 - i x_2 = 0$$

$$\Rightarrow E_A(i) = N\left(\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{\begin{bmatrix} ih \\ h \end{bmatrix} \middle| h \in \mathbb{C}\right\}$$

Una base di $E_A(i)$ è $\left\{\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\Big($ d_1 = molteplicità geometrica di λ_1 =

$=$ (numero di colonne di $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$) $-$ $\operatorname{rk}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ =

$= 2 - 1 = 1$ $\Big)$

$$E_A(\lambda_2) = E_A(-i) = N(A + iI_2) = N\left(\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{12}]{} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-i)]{} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad E_A(-i) = N\left(\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \iff x_1 + ix_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_A(-i) = N\left(\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} -i\ell \\ \ell \end{bmatrix} \middle| \ell \in \mathbb{C} \right\}$$

Una base di $E_A(-i)$ è $\left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\Big($ d_2 = molteplicità geometrica di λ_2 = (numero di colonne di $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$) $- \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 - 1 = 1$ $\Big)$