C. PARMEGGIANI 30/5/2019

ALGEBRA E DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di laurea: Informatica

SOMME E SOMME DIRETTE DI SOTTOSPAZI

Siano V uno spazio vettoriale ed $U_1, U_2, \dots, U_n$ sottospazi di V. LA SOMMA DEI SOTTOSPAZI $U_1, U_2, \dots, U_n$ è

$$\{\underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \dots + \underline{u}_n \mid \underline{u}_i \in U_i,\ i = 1, \dots, n\} =$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \underline{u}_i \mid \underline{u}_i \in U_i,\ i = 1, \dots, n \right\}$$

Si indica con $U_1 + U_2 + \dots + U_n$, oppure $\sum_{i=1}^{n} U_i$

N.B. Dal fatto che $U_1, U_2, \dots, U_n$ sono sottospazi di V segue che anche $\sum_{i=1}^{n} U_i$ è un sottospazio di V

(si veda il caso $n=2$ nella LEZIONE 18)

Se $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ si ha che $U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j\right) = \{\underline{0}\}$

allora $U_1 + U_2 + \dots + U_n$ si indica

$U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$ (oppure $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i$) e la somma si chiama SOMMA DIRETTA DEI SOTTOSPAZI

(nella LEZIONE 18 abbiamo visto il caso $n=2$)

Ad esempio se $n=3$, si ha che la somma dei tre sottospazi U_1, U_2, U_3 è una somma diretta se

$$\begin{cases} U_1 \cap (U_2 + U_3) = \{\underline{0}\} \\ U_2 \cap (U_1 + U_3) = \{\underline{0}\} \\ U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{\underline{0}\} \end{cases}$$

INDIPENDENZA DI AUTOSPAZI DISTINTI

TEOREMA $A_{n \times n}$

$\mathrm{Spec}\,A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$

quindi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ gli AUTOVALORI DISTINTI di A

Per ogni $i = 1, \dots, k$ $\quad E_A(\lambda_i)$ è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ (LEZIONE 28)

Allora la somma dei sottospazi $E_A(\lambda_i)$ è una somma diretta:

$$E_A(\lambda_1) + E_A(\lambda_2) + \dots + E_A(\lambda_k) = E_A(\lambda_1) \oplus E_A(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E_A(\lambda_k)$$

(scritto in forma compatta: $\sum_{i=1}^{k} E_A(\lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_A(\lambda_i)$)

ed è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$

Usando questo teorema è possibile provare:

COROLLARIO 1: se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori distinti di A $n \times n$ e

$\forall i = 1, \dots, k \quad \mathcal{B}_i$ è una base di $E_A(\lambda_i)$

allora

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ è una base di $\bigoplus_{i=1}^{k} E_A(\lambda_i)$

COROLLARIO 2: Autovettori relativi ad autovalori distinti di A sono L.I, In simboli:

se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sono autovalori distinti e

$\underline{v}_i \in E_A(\lambda_i)$, $\underline{v}_i \neq \underline{0}$, $i=1,\dots,k \Rightarrow \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$ è L.I

cioè $\begin{cases} A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \\ \underline{v}_i \neq \underline{0} \end{cases}$

cioè
$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \dots + \alpha_k\underline{v}_k = \underline{0}$
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

MATRICI SIMILI ED AUTOVALORI

Def Si dice che una matrice A è SIMILE ad una matrice B se esiste una matrice NON SINGOLARE S tale che

$$A = SBS^{-1}$$

N.B. se A è simile a B allora B è simile ad A:

A simile a $B \Rightarrow \exists S$ non singolare tale che $A = SBS^{-1}$

$\Rightarrow$ (MOLTIPLICANDO A SINISTRA PER S^{-1})

$$S^{-1} \cdot A = S^{-1}(SBS^{-1}) \overset{\text{ASSOCIATIVA}}{=} (S^{-1}S)BS^{-1} \overset{S^{-1}S = I}{=} IBS^{-1} \overset{IB = B}{=} BS^{-1},$$

$\Rightarrow$ (MOLTIPLICANDO A DESTRA $S^{-1}A = BS^{-1}$ PER S)

$$(S^{-1}A)S = (B \cdot S^{-1})S \underset{\text{ASSOCIATIVA}}{=} B(S^{-1}S) \underset{S^{-1}S = I}{=} B \cdot I \underset{BI = B}{=} B$$

$\Rightarrow$ $B = S^{-1}AS$ ed S^{-1} è non singolare (la sua inversa è $(S^{-1})^{-1} = S$)

$\Rightarrow$ B è simile ad A

Quindi: due MATRICI A e B si dicono SIMILI se esiste una matrice NON SINGOLARE S tale che $A = SBS^{-1}$.

TEOREMA: Siano A e B due matrici simili. Allora si può provare che

$\boxed{1}$ A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.

In particolare, A e B hanno gli stessi autovalori

e per ogni $\lambda \in \operatorname{spec} A = \operatorname{spec} B$ si ha:

$$\begin{pmatrix}\text{LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA} \\ \text{DI } \lambda \text{ IN QUANTO AUTOVALORE} \\ \text{DI } A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA} \\ \lambda \text{ IN QUANTO AUTOVALORE} \\ \text{DI } B\end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ $\forall \lambda \in \operatorname{spec} A = \operatorname{spec} B$ si ha:

$$\dim E_A(\lambda) = \dim E_B(\lambda) \quad \text{ed inoltre,}$$

LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI λ IN QUANTO AUTOVALORE DI A

LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI λ IN QUANTO AUTOVALORE DI B

se S è una singolare tale che $A = SBS^{-1}$ allora

$$\boxed{\underline{v} \in E_B(\lambda) \iff S\underline{v} \in E_A(\lambda).}$$

INFATTI:

$$\underline{v} \in E_B(\lambda) \iff B\underline{v} = \lambda \underline{v} \iff (S^{-1}AS)\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

definizione di $E_B(\lambda)$ $B = S^{-1}AS$ $\parallel$ $S^{-1}AS\underline{v}$

definizione di $E_A(\lambda)$

$$\iff A(S\underline{v}) = \lambda(S\underline{v}) \iff S\underline{v} \in E_A(\lambda)$$

$S^{-1}AS\underline{v} = \lambda \underline{v} \Rightarrow S(S^{-1}AS\underline{v}) = S(\lambda \underline{v})$

MOLTIPLICANDO A SINISTRA PER S

ma $S(S^{-1}AS\underline{v}) = SS^{-1}AS\underline{v} = IAS\underline{v} = A(S\underline{v})$

e $S(\lambda\underline{v}) = \lambda(S\underline{v})$ quindi $\boxed{S^{-1}AS\underline{v} = \lambda\underline{v} \Rightarrow AS\underline{v} = \lambda S\underline{v}}$

λ SCALARE

VICEVERSA: $AS\underline{v} = \lambda(S\underline{v}) \Rightarrow S^{-1}(AS\underline{v}) = S^{-1}(\lambda S\underline{v})$

MOLTIPLICANDO A SINISTRA PER S^{-1}

λ SCALARE!

ma $S^{-1}(\lambda S\underline{v}) = S^{-1}\lambda S\underline{v} = \lambda S^{-1}S\underline{v} = \lambda I\underline{v} = \lambda\underline{v}$

Quindi $\boxed{A(S\underline{v}) = \lambda(S\underline{v}) \Rightarrow S^{-1}AS\underline{v} = \lambda\underline{v}}$

Dunque $\underline{v} \in E_B(\lambda) \Leftrightarrow S\underline{v} \in E_A(\lambda)$

MATRICI DIAGONALIZZABILI E LORO CARATTERIZZAZIONI

Def Sia A $n \times n$, A si dice DIAGONALIZZABILE se è simile ad una matrice diagonale, ossia se esistono S non singolare e D diagonale tali che $A = SDS^{-1}$.

"UTILITÀ" DEL SAPERE SE UNA MATRICE È DIAGONALIZZABILE

ad esempio:

CALCOLO DELLE POTENZE DI UNA MATRICE

Se A è $n \times n$ si definisce
$$A^1 = A$$
$$A^2 = AA$$
$$A^3 = A^2 \cdot A$$
$$\vdots$$
$$A^m = A^{m-1} \cdot A$$

SE $A = D$ è diagonale, calcolare una sua potenza è facile:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & \textcircled{1} \\ & d_2 & \\ \textcircled{1} & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \Rightarrow D^m = \begin{bmatrix} d_1^m & & \textcircled{1} \\ & d_2^m & \\ \textcircled{1} & & \ddots & \\ & & & d_n^m \end{bmatrix}$$

$m \in \mathbb{N}$

SE A è diagonalizzabile $\Rightarrow A = SDS^{-1}$ con S non singolare
e D diagonale

$$\Rightarrow A^2 = A \cdot A = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD\cancel{S^{-1}}\cancel{S}DS^{-1} = SD^2S^{-1}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (SD^2S^{-1})(SDS^{-1}) = SD^2\cancel{S^{-1}}\cancel{S}DS^{-1} = SD^3S^{-1}$$

$$\dots \quad \Rightarrow \quad A^m = SD^mS^{-1}$$

Quindi

$$A = S\begin{bmatrix} d_1 & & \text{\textcircled{0}} \\ & d_2 & \\ \text{\textcircled{0}} & & \ddots \\ & & & d_n \end{bmatrix} S^{-1} \Rightarrow A^m = S\begin{bmatrix} d_1^m & & \text{\textcircled{0}} \\ & d_2^m & \\ \text{\textcircled{0}} & & \ddots \\ & & & d_n^m \end{bmatrix} S^{-1}$$

CARATTERIZZAZIONI DELLE MATRICI DIAGONALIZZABILI

Sia A $n \times n$ complessa
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ gli autovalori DISTINTI di A — per cui $\operatorname{spec} A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$

$m_1, m_2, \dots, m_k$ le loro molteplicità algebriche
$d_1, d_2, \dots, d_k$ le loro molteplicità geometriche

Allora sono equivalenti:

$\boxed{1}$ A è diagonalizzabile

$\boxed{2}$ $\mathbb{C}^n$ ha una base costituita da autovettori di A

(cioè $\exists \mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ base di $\mathbb{C}^n$ tale che
$\forall i = 1, \dots, n$ $\quad \underline{v}_i \in E_A(\lambda)$ per un opportuno $\lambda \in \operatorname{spec} A$)

$\boxed{3}$ $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} E_A(\lambda_i)$

(abbiamo visto che $\sum_{i=1}^{k} E_A(\lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_A(\lambda_i)$ è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ QUALUNQUE sia A.

A è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ questo sottospazio è TUTTO $\mathbb{C}^n$)

$\boxed{4}$ $m_i = d_i$ per ogni $i = 1, \dots, k$

PER CASA: ESERCIZI 7 e 8 (file: I19casaT12.pdf)

Supponiamo di sapere che A è diagonalizzabile (ad esempio, avendo verificato che ciascun suo autovalore ha molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica). Vogliamo trovare

S non singolare e
D diagonale

tali che $A = SDS^{-1}$

Siccome ① D ha gli stessi autovalori di A con le stesse molteplicità (perché A e D sono simili)

② gli autovalori di D sono i suoi elementi diagonali (perché D è diagonale)

se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori distinti di A con
$m_1, m_2, \dots, m_k$ le loro molteplicità algebriche e
$d_1, d_2, \dots, d_k$ // geometriche

allora $m_i = d_i \ \forall i$ (stiamo supponendo A diagonalizzabile) e

D è una matrice diagonale con sulla diagonale

λ_1 "contato m_1 volte"

λ_2 "contato m_2 volte"

$\vdots$

λ_k "contato m_k volte"

AD ESEMPIO POSSO PRENDERE

$$D=\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_1\end{matrix}}^{m_1 \text{ volte}} & & & 0 \\ & \underbrace{\begin{matrix}\lambda_2 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_2\end{matrix}}_{m_2 \text{ volte}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \underbrace{\begin{matrix}\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k\end{matrix}}_{m_k \text{ volte}} \end{bmatrix}$$

N.B. $m_1+m_2+\dots+m_k=n$ (LEZIONE 29) quindi la diagonale di D ha n elementi, quindi D è $n \times n$

Per costruire S....

Sono $i \in \{1,\dots,n\}$ e λ l'i-esimo elemento sulla diagonale di D allora

$$D\underline{e}_i = (\text{i-esima colonna di } D) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i = \lambda \underline{e}_i$$

$\underline{e}_i$ = i-esima colonna di I_n

per cui $\underline{e}_i \in E_D(\lambda)$.

Abbiamo visto che se $A = SBS^{-1}$ e $\lambda \in \operatorname{spec} A = \operatorname{spec} B$ allora

$$\underline{v} \in E_B(\lambda) \iff S\underline{v} \in E_A(\lambda)$$

In particolare qui, con D al posto di B ed $\underline{e_i}$ al posto di $\underline{v}$:

$$\underline{e_i} \in E_D(\lambda) \iff S\underline{e_i} \in E_A(\lambda)$$

e siccome $S\underline{e_i} = (i\text{-esima colonna di } S)$

concludiamo:

SE SCELGO $D = \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_1}^{m_1 \text{ volte}} & & & 0 \\ & \underbrace{\lambda_2 \ \cdots \ \lambda_2}_{m_2 \text{ volte}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \underbrace{\lambda_k \ \cdots \ \lambda_k}_{m_k \text{ volte}} \end{bmatrix}$ ALLORA IN S

le colonne dalla 1^{Δ} alla m_1-esima devono essere vettori in $E_A(\lambda_1)$

" " " (m_1+1)-esima alla m_2-esima " " $E_A(\lambda_2)$

⋮

etc.

Perché S sia non singolare ....

$$\boxed{\forall i = 1, \dots, k \text{ sia } \mathcal{B}_i \text{ una } \textbf{BASE} \text{ di } E_A(\lambda_i)}$$

N.B. $m_i = d_i = \dim E_A(\lambda_i) \Rightarrow \mathcal{B}_i$ ha $m_i = d_i$ vettori

sto supponendo A diagonalizzabile

le colonne dalla 1^{Δ} alla m_1-esima sono gli elementi di $\mathcal{B}_1$

" " " (m_1+1)-esima alla m_2-esima sono " di $\mathcal{B}_2$

⋮

etc.

con $D = \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{m_1} & & & 0 \\ & \overbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}^{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \overbrace{\lambda_k \cdots \lambda_k}^{m_k} \end{bmatrix} \Rightarrow S$ $\left[\underbrace{\text{GLI ELEMENTI DI } \mathcal{B}_1}_{d_1 = m_1 \text{ colonne}} \;\Big|\; \underbrace{\text{GLI ELEMENTI DI } \mathcal{B}_2}_{d_2 = m_2 \text{ colonne}} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; \underbrace{\text{GLI ELEMENTI DI } \mathcal{B}_k}_{d_k = m_k \text{ colonne}} \right]$

N.B. Allora $\exists S^{-1}$: infatti

$\boxed{I}$ lo spazio delle colonne $C(S)$ di S è generato da $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ (COSTRUZIONE DI S)

$\boxed{II}$ per il corollario 1 al primo teorema di oggi $\mathcal{B}$ è una base di $\bigoplus_{i=1}^{k} E_A(\lambda_i)$

$\boxed{III}$ Per il punto (3) del teorema che caratterizza le diagonalizzabili (ED A È DIAGONALIZZABILE) si ha che $\bigoplus_{i=1}^{k} E_A(\lambda_i) = \mathbb{C}^n$

Dunque $\boxed{I} + \boxed{II} + \boxed{III} \Rightarrow C(S) = \mathbb{C}^n$

$\Rightarrow rk\, S = \dim C(S) = \dim \mathbb{C}^n = n$

$\Rightarrow \exists S^{-1}$

ESERCIZIO TIPO 19 (file: I19tipo19.pdf)

PER CASA: ESERCIZI 9, 10, 11 e 12 (file: I19casaT12.pdf)