G. PARMEGGIANI 31/5/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)
Corso di Laurea: Informatica

N.B. Data A $n \times n$, $\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$,

$m(\lambda)$ = la molteplicità algebrica di λ e
$d(\lambda)$ = " " geometrica di λ:

Da $1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda)$ segue che

SE $m(\lambda) = 1$ ALLORA $d(\lambda) = 1$. Quindi

SE A ha tutti gli autovalori distinti ALLORA A è diagonalizzabile

ATTENZIONE!

A diagonalizzabile $\not\Rightarrow$ A ha tutti gli autovalori distinti

Ad esempio $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile (è diagonale!) ma non ha gli autovalori distinti

IL CASO $n=2$

Se A è 2×2, $\deg p_A(x) = 2$ (LEZIONE 29) e si hanno 2 possibilità:

$\boxed{1}$ $p_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\boxed{2}$ $p_A(x) = (x-\lambda)^2$

nel caso $\boxed{1}$ $\begin{cases} m_1 = d_1 = 1 \\ m_2 = d_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ A è diagonalizzabile nel caso $\boxed{2}$ si ha che A è diagonalizzabile $\iff \dim E_A(\lambda)=2$

Essendo A 2×2 è $E_A(\lambda) \leq \mathbb{C}^2$ e

$\dim E_A(\lambda) = 2 = \dim \mathbb{C}^2 \iff E_A(\lambda) = \mathbb{C}^2 \iff$

LEZIONE 18

LEZIONE 18
se $U \leq V$ allora
$U = V \iff \dim U = \dim V$

$\iff A\underline{v} = \lambda \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{C}^2$

Notato che $\left[A\underline{v} = \lambda \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{C}^2 \right] \iff A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

"$\Leftarrow$" se $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ allora $A = \lambda I_2$ e $\forall \underline{v} \in \mathbb{C}^2$ si ha

$$A\underline{v} = (\lambda I_2)\underline{v} = \lambda (I_2 \underline{v}) = \lambda \underline{v}$$

"$\Rightarrow$" se $A\underline{v} = \lambda \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{C}^2$ allora, in particolare

(*) $A\underline{e}_1 = \lambda \underline{e}_1$ (prendendo $\underline{v} = \underline{e}_1$) ed anche

(**) $A\underline{e}_2 = \lambda \underline{e}_2$ (prendendo $\underline{v} = \underline{e}_2$)

Da (*) otteniamo:

$$(1^a \text{ colonna di } A) = A\underline{e}_1 \overset{(*)}{=} \lambda \underline{e}_1 = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2^a \text{ colonna di } A) = A\underline{e}_2 \underset{(**)}{=} \lambda \underline{e}_2 = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

In conclusione nel caso $n=2$ se $p_A(x) = (x-\lambda)^2$ allora

A è diagonalizzabile $\iff A = \lambda I_2$ (A È SCALARE)

Quindi SOLO SE $n=2$ ed A NON È SCALARE

si ha che A è diagonalizzabile $\iff$ ha autovalori distinti.

MATRICI UNITARIAMENTE DIAGONALIZZABILI - TEOREMA SPETTRALE

Def 1: Una MATRICE (complessa) U si dice UNITARIA se $U^H = U^{-1}$.

Def 2: Una MATRICE " U " ORTOGONALE se $U^T = U^{-1}$.

$\boxed{\text{N.B.}}$ $\left.\begin{array}{l} U \text{ reale} \\ U \text{ unitaria} \end{array}\right\} \Rightarrow U$ ortogonale

Infatti se U è reale ed unitaria allora $\underset{U \text{ REALE}}{U^T =} U^H \underset{U \text{ UNITARIA}}{=} U^{-1}$

Def 3 Una MATRICE A si dice UNITARIAMENTE DIAGONALIZZABILE se è "diagonalizzabile tramite una matrice unitaria", ossia SE ESISTONO U UNITARIA E D DIAGONALE TALI CHE

$$A = UDU^H$$

N.B.: $U^H = U^{-1}$

$\boxed{\text{NB}}$ A unitariamente diagonalizzabile $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ A diagonalizzabile

Def 4 Una MATRICE A si dice NORMALE se $AA^H = A^H A$.

TEOREMA A è unitariamente diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ A è normale

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{PER CASA: DOMANDA (a) DEGLI ESERCIZI} \\ \quad 13, 14 \text{ e } 15 \quad (\text{file: I19casaT12.pdf})\end{array}}$$

Supponiamo di sapere che A è normale.

Allora $A = UDU^H$ TEOREMA SPETTRALE: VERSIONE MOLTIPLICATIVA

Troviamo una "diagonalizzazione unitaria" di A (ossia costruiamo D ed U).

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di A, $m_1, m_2, \dots, m_k$ le loro molteplicità algebriche

allora se A è $n \times n$ è $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ (LEZIONE 29)

e $m_i = d_i \quad \forall i = 1, \dots, k$ (A unitariamente diagonalizzabile
A diagonalizzabile $\Rightarrow m_i = d_i$ $\forall i = 1, \dots, k$ (LEZIONE 30))

Se scelgo

$$D = \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \ddots \ \lambda_1}^{m_1} & & & \\ & \overbrace{\lambda_2 \ \ddots \ \lambda_2}^{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overbrace{\lambda_k \ \ddots \ \lambda_k}^{m_k} \end{bmatrix}$$

allora

$$U = \Big[\overbrace{\text{BASE ORTONORMALE DI } E_A(\lambda_1)}^{m_1 = d_1} \ \Big| \ \overbrace{\text{BASE ORTONORMALE DI } E_A(\lambda_2)}^{m_2 = d_2} \ \Big| \ \text{----} \ \Big| \ \overbrace{\text{BASE ORTONORMALE DI } E_A(\lambda_k)}^{m_k = d_k} \Big]$$

Posto Q_1 = una matrice le cui colonne sono gli elementi di una BASE ORTONORMALE di $E_A(\lambda_1)$ (Q_1 è $n \times d_1 = n \times m_1$)

Q_2 = una matrice le cui colonne sono gli elementi di una BASE ORTONORMALE di $E_A(\lambda_2)$ (Q_2 è $n \times d_2 = n \times m_2$)

......

Q_k = una matrice le cui colonne sono gli elementi di una BASE ORTONORMALE di $E_A(\lambda_k)$ (Q_k è $n \times d_k = n \times m_k$)

ho $U = [Q_1 \, Q_2 \cdots Q_k]$ e PER OGNI $i = 1, \dots, k$

$P_i = Q_i Q_i^H$ è la matrice di proiezione di $\mathbb{C}^n$ su $EA(\lambda_i)$

(LEZIONE 27)

Q_i è $n \times m_i \Rightarrow Q_i^H$ è $m_i \times n$

$\Rightarrow P_i = Q_i Q_i^H$ è $n \times n$

Calcolo:

$$A = \underbrace{U}_{U} D U^H = [\overbrace{Q_1}^{m_1} \overbrace{Q_2}^{m_2} \dots \overbrace{Q_k}^{m_k}] \underbrace{\begin{array}{c|cccc} & m_1 & m_2 & \dots & m_k \\ \hline m_1 & \lambda_1 I & & & \\ m_2 & & \lambda_2 I & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ m_k & & & & \lambda_k I \end{array}}_{D} \underbrace{\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_k \end{array}\begin{bmatrix} Q_1^H \\ Q_2^H \\ \vdots \\ Q_k^H \end{bmatrix}}_{U^H} =$$

$$= [\overbrace{Q_1 \cdot \lambda_1 I}^{m_1} \; \overbrace{Q_2 \cdot \lambda_2 I}^{m_2} \dots \overbrace{Q_k \lambda_k I}^{m_k}] \begin{bmatrix} Q_1^H \\ Q_2^H \\ \vdots \\ Q_k^H \end{bmatrix} \begin{array}{l})m_1 \\ )m_2 \\ \\ )m_k \end{array} \underset{*}{=}$$

$*$ $\forall i$ è $Q_i \lambda_i I = \lambda_i Q_i$ essendo i λ_i degli scalari

$$= [\overbrace{\lambda_1 Q_1}^{m_1} \; \overbrace{\lambda_2 Q_2}^{m_2} \dots \overbrace{\lambda_k Q_k}^{m_k}] \begin{bmatrix} Q_1^H \\ Q_2^H \\ \vdots \\ Q_k^H \end{bmatrix} \begin{array}{l})m_1 \\ )m_2 \\ \\ )m_k \end{array} =$$

QUESTA UGUAGLIANZA SEGUE DA:

1. $\forall i = 1, \dots, k$ $\exists Q_i Q_i^H$ (ESISTE IL PRODOTTO)
2. $\forall i = 1, \dots, k$ TUTTI i $Q_i Q_i^H$ SONO "GRANDI UGUALI" (SONO TUTTI $n \times n$) E QUINDI POSSONO ESSERE SOMMATI

$$= \lambda_1 Q_1 Q_1^H + \lambda_2 Q_2 Q_2^H + \dots + \lambda_k Q_k Q_k^H =$$

abbiamo posto $P_i = Q_i Q_i^H$

$$= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k$$

Concludendo: siano A unitaria $n \times n$
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di A
$m_1, m_2, \dots, m_k$ le loro molteplicità algebriche

e $\forall i = 1, \dots, k$ Q_i la matrice $n \times d_i$ ($e \; d_i = m_i$)
le cui colonne sono gli elementi di una
BASE ORTONORMALE di $E_A(\lambda_i)$, per cui

$P_i = Q_i Q_i^H$ è la matrice di proiezione di $\mathbb{C}^n$ su $E_A(\lambda_i)$

Allora $A = U D U^H$ VERSIONE MOLTIPLICATIVA DEL TEOREMA SPETTRALE

con $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 \; \lambda_2 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots \; \lambda_k & \\ & & & & & \ddots \; \lambda_k \end{bmatrix}$ ed $U = [Q_1 \, Q_2 \cdots Q_k]$
(ad esempio)

ed anche $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k$ VERSIONE ADDITIVA DEL TEOREMA SPETTRALE

dove $\forall i = 1, \dots, k$ $P_i = Q_i Q_i^H$ è la matrice di proiezione di $\mathbb{C}^n$ su $E_A(\lambda_i)$.

$\boxed{\text{NB}}$ Se A è unitariamente diagonalizzabile e λ_i, λ_j sono due autovalori distinti di A (ossia $\lambda_i \neq \lambda_j$) allora ogni vettore in $E_A(\lambda_i)$ è ortogonale (rispetto al prodotto scalare canonico) ad ogni vettore in $E_A(\lambda_j)$ (si dice: in una matrice unitariamente diagonalizzabile, autospazi relativi ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali)

$\boxed{\text{NB}}$ In particolare dal $\boxed{\text{NB}}$ precedente segue (perché se $\overset{n \times n}{A}$ è unitariamente diagonalizzabile allora $\overset{n \times n}{A}$ è diagonalizzabile e quindi (LEZIONE 30) $\mathbb{C}^n = \sum_{i=1}^{k} E_A(\lambda_i)$, cioè $\mathbb{C}^n$ è somma di tutti gli autospazi di A)

se A $n\times n$ è unitariamente diagonalizzabile ed ha esattamente 2 autovalori distinti, λ_1 e λ_2, allora

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$$

con P_i = matrice di proiezione su $E_A(\lambda_i)$ $i=1,2$.

Da $\mathbb{C}^n = E_A(\lambda_1) + E_A(\lambda_2)$ e $E_A(\lambda_1)$ ortogonale ad $E_A(\lambda_2)$

segue che $E_A(\lambda_1) = E_A(\lambda_2)^\perp$ — $E_A(\lambda_1)$ È IL COMPLEMENTO ORTOGONALE DI $E_A(\lambda_2)$ IN $\mathbb{C}^n$

ed anche $E_A(\lambda_2) = E_A(\lambda_1)^\perp$ — $E_A(\lambda_2)$ È IL COMPLEMENTO ORTOGONALE DI $E_A(\lambda_1)$ IN $\mathbb{C}^n$

quindi essendo P_1 la matrice di proiezione su $E_A(\lambda_1)$ è

$I-P_1$ " " " $E_A(\lambda_1)^\perp = E_A(\lambda_2)$

$\Longrightarrow$ $P_2 = I - P_1$ è il NB3 della LEZIONE 27

equivalentemente: essendo P_2 la matrice di proiezione su $E_A(\lambda_2)$ è

$I-P_2$ " " " $E_A(\lambda_2)^\perp = E_A(\lambda_1)$

$\Longrightarrow$ $P_1 = I - P_2$ è il NB3 della LEZIONE 27

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ unitariamente diagonalizzabile} \\ \operatorname{Spec} A = \{\lambda_1, \lambda_2\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 (I - P_1) = (\lambda_1 - \lambda_2) P_1 + \lambda_2 I$$

OSSERVAZIONI

$\boxed{1}$ $A = A^H \Longrightarrow$ tutti gli autovalori di A sono numeri REALI

DIM $A = A^H \Longrightarrow AA^H = A^H A \underset{\text{teorema spettrale}}{\Longrightarrow} A = UDU^H$ con

D diagonale con sulla diagonale gli autovalori di A ed U unitaria (ossia $U^H = U^{-1}$).

Da $A = UDU^H$ segue $A^H = (UDU^H)^H$

Poiché

l'H-trasposta di un prodotto è il prodotto delle H-trasposte in ordine scambiato

$(UDU^H)^H = (U^H)^H D^H U^H = UD^H U^H$ allora

$A = A^H \Rightarrow UDU^H = UD^H U^H \Rightarrow$ moltiplicando a sinistra per U^H

$\Rightarrow \boxed{\underbrace{U^H U}_{I}} DU^H = \boxed{\underbrace{U^H U}_{I}} D^H U^H \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad DU^H = D^H U^H \Rightarrow$ moltiplicando a destra per U

$\Rightarrow \quad D \boxed{\underbrace{U^H U}_{I}} = D^H \boxed{\underbrace{U^H U}_{I}} \Rightarrow D = D^H$

$\Rightarrow \quad d_i = \bar{d}_i$ per ogni d_i elemento sulla diagonale di D

$\Rightarrow d_i \in \mathbb{R}$ per ogni elemento sulla diagonale di D.

Poiché gli elementi sulla diagonale di D sono gli autovalori di A (contati con le loro molteplicità), concludiamo che gli autovalori di A sono NUMERI REALI.

$\boxed{2}$ Sia A REALE. Allora

$$\left[\begin{array}{l} A = UDU^T \\ \text{con } U \text{ e } D \text{ reali} \\ D \text{ diagonale} \\ U^T = U^{-1} \text{ (quindi } U \text{ ortogonale)} \end{array}\right] \Longleftrightarrow A = A^T$$

Infatti:

"$\Leftarrow$" Sia $A = A^T$. Essendo A reale è $A^T = A^H$, per cui $A = A^H$. In particolare $AA^H = A^H A$, ossia A è normale e quindi

$\exists U$ unitaria $\exists D$ diagonale t.c.

$$A = U D U^H$$

Sulla diagonale di D ci sono gli autovalori di A, ed essendo $A = A^H$ dall' OSSERVAZIONE $\boxed{1}$ segue che gli autovalori di A sono REALI.

Dunque D è reale. E' POSSIBILE PROVARE CHE SI PUÒ SCEGLIERE ANCHE U REALE, per cui $U^H = U^T$ ed $A = UDU^T$ con D diagonale reale e U ortogonale reale.

"$\Rightarrow$" Sia $A = UDU^T$ con D diagonale e $U^T = U^{-1}$.

Allora $A^T = (UDU^T)^T = (U^T)^T D^T U^T =$

la trasposta di un prodotto è il prodotto delle trasposte in ordine scambiato

$= U D^T U^T = UDU^T = A$ ossia $A = A^T$.

D diagonale $\Rightarrow D^T = D$