S. PARMEGGIANI 4/6/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

ESERCIZIO 1

Sia $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da:

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b \\ a+b \end{bmatrix} \text{ per ogni } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$\boxed{1}$ Si provi che T è un'applicazione lineare.

$\boxed{2}$ Si calcoli la matrice A associata a T rispetto alle basi ordinate

$\mathcal{B} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ nel dominio e

$\mathcal{D} = \left\{ \underline{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ nel codominio.

ESERCIZIO 2

Sia $\mathcal{W} = \left\langle \underline{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{bmatrix} 6i \\ -12 \\ 6i \end{bmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{bmatrix} -4i \\ 0 \\ 4i \end{bmatrix} \right\rangle$.

$\boxed{1}$ Si trovi una base ortonormale di $\mathcal{W}$.

$\boxed{2}$ Si calcoli la proiezione ortogonale $P_{\mathcal{W}}(\underline{v})$ del vettore $\underline{v} = \begin{bmatrix} 10i \\ 3 \\ 2i \end{bmatrix}$ su $\mathcal{W}$.

ESERCIZIO 3

Sia $A(\alpha) = \begin{bmatrix} i & -2 & -1 \\ 2i & -4 & -2 \\ 2i & \alpha^2-3 & -2 \end{bmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$

$\boxed{1}$ Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio delle colonne $C(A(\alpha))$ di $A(\alpha)$.

$\boxed{2}$ Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio nullo $N(A(\alpha))$ di $A(\alpha)$

ESERCIZIO 4 Siano $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9i \\ i & 0 & -9 \\ -1 & 0 & -9i \end{bmatrix}$

e $V = C(A)$ lo spazio delle colonne di A. Si trovi una base del complemento ortogonale $V^{\perp}$ di V in $\mathbb{C}^3$.

ESERCIZIO 5 Sia $A(\alpha) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

$\boxed{1}$ Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che $A(\alpha)$ è diagonalizzabile?

$\boxed{2}$ Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che $A(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile?