I19L7

martedì 12 marzo 2019 10:30

G. PARMEGGIANI 12/3/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

$\boxed{\text{NB1}}$ PER IL PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UNO SCALARE VALE LA LEGGE DI CANCELLAZIONE:

$$\alpha A = \mathbb{O} \implies \alpha = 0 \text{ oppure } A = \mathbb{O}$$

matrice con tutti i coefficienti uguali a 0

$\boxed{\text{NB2}}$

1) $\alpha \cdot A = A \cdot \alpha \quad \forall \alpha$ scalare, $\forall A$
2) $1 \cdot A = A \quad \forall A$
3) $0 \cdot A = \mathbb{O} \quad \forall A$
4) $(\alpha\beta) A = \alpha(\beta A)$
$\forall \alpha, \beta$ scalari, $\forall A$

$\boxed{\text{NOTAZIONI}}$ $(-1) \cdot A = -A = [-a_{ij}]$ se $A = [a_{ij}]$

si indica

$-A$ si chiama $\boxed{\text{LA MATRICE OPPOSTA DELLA MATRICE } A}$

$\boxed{II}$ SOMMA DI DUE MATRICI

Def Date due matrici $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{ij})_{r\times s}$ "CON LE STESSE DIMENSIONI" (cioè tali che $\begin{cases} r=m \\ s=n \end{cases}$)

si definisce

$$\underset{m\times n}{A+B}=[a_{ij}+b_{ij}]$$

LA SOMMA DELLE DUE MATRICI

ESEMPIO Siano $\underset{2\times 3}{A}=\begin{bmatrix} 1+i & 3 & 2 \\ i & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $\underset{2\times 2}{B}=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3i & 0 \end{bmatrix}$

e $\underset{2\times 3}{C}=\begin{bmatrix} 0 & i & 2-i \\ i & 7+i & i \end{bmatrix}$

$\nexists\, A+B$ perché A e B non hanno le stesse dimensioni

$\nexists\, B+C$ " B e C "

$\exists\, A+C$ " A e C hanno le stesse dimensioni ed è

$$\underset{2\times 3}{A+C}=\begin{bmatrix} (1+i)+0 & 3+i & 2+(2-i) \\ i+i & 0+(7+i) & 7+i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+i & 3+i & 4-i \\ 2i & 7+i & 7+i \end{bmatrix}$$

PROPRIETÀ DELLA SOMMA

Siano A, B, C $m\times n$
α, β scalari

$\boxed{1}$ $A+(B+C)=(A+B)+C$ PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

$\boxed{2}$ $A+B=B+A$ PROPRIETÀ COMMUTATIVA

$\boxed{3}$ $A+\mathbb{O}=A$

$\boxed{4}$ $A+(-A)=\mathbb{O}$

$\boxed{5}$ $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$\boxed{6}$ $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

III PRODOTTO DI UN VETTORE RIGA PER UN VETTORE COLONNA

chiameremo VETTORI le matrici con una sola riga (VETTORI RIGA) e le matrici con una sola colonna (VETTORI COLONNA)

$$\cancel{U = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{m1} \end{bmatrix}} \quad \leadsto \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

e $\underline{u}^T = [u_1 \, u_2 \cdots u_m]$

Def Il PRODOTTO (riga per colonna) di

$\underline{v}^T = [v_1 \, v_2 \cdots v_m]$ per $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$

Lo STESSO m!

$$\underline{v}^T \underline{u} = [v_1 \, v_2 \cdots v_m] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$$

(la riga è "LUNGA" quanto la colonna è "ALTA")

ESEMPIO $\cancel{[7 \quad 1+i \quad 3] \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}}$ $\nexists$

$$[7 \quad 1+i \quad 3] \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \\ 2i \end{bmatrix} = 7 \cdot (-1) + (1+i)(1-i) + 3 \cdot 2i =$$

$$= -7 + 1^2 - i^2 + 6i =$$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= -7 + 1 - (-1) + 6i =$$

$$= -7 + 1 + 1 + 6i =$$

$$= -5 + 6i$$

$\boxed{\text{NB 1}}$

$\boxed{1}$ $\underline{v}^T \cdot \underline{0} = 0$ colonna di zeri alta tanto quant'è lunga la riga $\underline{v}^T$

numero 0

$\underline{v}^T = [v_1 \dots v_n]$

$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ $$\underline{v}^T \underline{u} = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i =$$

$v_i u_i = u_i v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$= [u_1 \; u_2 \dots u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= \underline{u}^T \underline{v}$$

$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $\underline{u}^T = [u_1 \dots u_n]$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, $\underline{v}^T = [v_1 \dots v_n]$

$$\underline{v}^T \underline{u} = \underline{u}^T \underline{v}$$

$\boxed{\text{NB 2}}$ **NON VALE LA LEGGE DI CANCELLAZIONE !**

ovvero

$$\underline{u} \neq \underline{0} \text{ e } \underline{v}^T \underline{u} = 0 \not\Rightarrow \underline{v}^T = \underline{0}^T$$

anche

$$\underline{v}^T \neq \underline{0}^T \text{ e } \underline{v}^T \underline{u} = 0 \not\Rightarrow \underline{u} = \underline{0}$$

ESEMPIO $\quad [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0 + 0 = 0$

IV PRODOTTO DI DUE MATRICI (RIGA PER COLONNA)

$A_{m \times n}$, $B_{r \times s}$ IL PRODOTTO (RIGA PER COLONNA) DI A E B E' POSSIBILE SOLO SE $r = n$

$$\underset{m \times n}{A} \quad \underset{r \times s}{B}$$

questi due numeri devono essere uguali

Se ora $r = n$, quindi $A_{m \times n}$ e $B_{n \times s}$.

Allora [illegible] $\quad AB = C = [c_{ij}]$ e C è $m \times s$

$$\underbrace{m \times n \; n \times s}_{(=)}$$

$c_{ij} =$ (i-esima riga di A) $\cdot$ (j-esima colonna di B)

"lunga" n $\qquad$ prodotto $\qquad$ "alta" n

Se $\underline{r}_1^T, \underline{r}_2^T, \dots, \underline{r}_m^T$ sono le righe di A, per cui $A = \begin{bmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_m^T \end{bmatrix}$

e $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_s$ sono le colonne di B,

per cui $B = [\underline{b}_1 \; \underline{b}_2 \; \dots \; \underline{b}_s]$

allora $\qquad c_{ij} = \underline{r}_i^T \cdot \underline{b}_j$

<u>ESEMPIO</u>

$\underset{2\times3}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underset{2\times2}{B} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underset{2\times3}{C} = \begin{bmatrix} 7 & 6i & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$\underset{3\times3}{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3i & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underset{3\times2}{F} = \begin{bmatrix} 7i & 6+i \\ -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$\not\exists$? AB
$2\times 3 \; 2 \times 2$
$\neq$

$\not\exists$? AC
$2\times 3 \; 2 \times 3$
$\neq$

$\exists$? $AE \Rightarrow$ sì $\exists$, ed è 2×3
$2\times 3 \; 3 \times 3$
$=$

$\exists$? $AF \Rightarrow$ sì $\exists$, ed è 2×2
$2\times 3 \; 3 \times 2$
$=$

Calcoliamo $\underset{2\times3 \; 3\times3}{AE}$ $\qquad \exists$ ed è 2×3

$$AE = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3i & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = [2 \quad 3 \quad 7] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\cdot 1 + 3\cdot 4 + 7\cdot 0 = 2+12+0 = 14$$

$$c_{12} = [2 \quad 3 \quad 7] \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \\ -1 \end{bmatrix} = 2\cdot 1 + 3\cdot 3i + 7\cdot(-1) = 2+9i-7 = -5+9i$$

$$c_{13} = [2 \quad 3 \quad 7] \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\cdot(-2) + 3\cdot 3 + 7\cdot 2 = -4+9+14 = 19$$

$$c_{21} = [6 \quad 0 \quad 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 6\cdot 1 + 0\cdot 4 + 5\cdot 0 = 6+0+0 = 6$$

$$c_{22} = [6 \quad 0 \quad 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \\ -1 \end{bmatrix} = 6\cdot 1 + 0\cdot 3i + 5\cdot(-1) = 6+0-5 = 1$$

$$c_{23} = [6 \quad 0 \quad 5] \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 6\cdot(-2) + 0\cdot 3 + 5\cdot 2 = -12+0+10 = -2$$

Dunque $$AE = \begin{bmatrix} 14 & -5+9i & 19 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AF = \dots \text{ per casa } \dots = \begin{bmatrix} 22+14i & 6+2i \\ 20+42i & 21+6i \end{bmatrix}$$

PER CASA: ESERCIZIO 1 (file: I19casaT3.pdf)

PROPRIETÀ DI CUI GODE IL PRODOTTO (RIGA PER COLONNA)

Supponiamo che tutte le operazioni seguenti si possano fare
Con A, B, C matrici e α scalare

[1] $A(BC) = (AB)C$ PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

[2] $\underset{r\times m}{\mathbb{O}} \cdot \underset{m\times n}{A} = \underset{r\times n}{\mathbb{O}}$

[3] Se I_n indica la matrice $n\times n$

$$I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & 1 \end{bmatrix}}_{n} \Bigg\} n$$

nella diagonale tutti 1

fuori dalla diagonale tutti 0 (N.B. la notazione è impropria: $\mathbb{O}$ indica una matrice, quindi una tabella rettangolare, mentre qui indica un TRIANGOLO di zeri, CHE NON È UNA MATRICE)

Si chiama MATRICE IDENTICA DI ORDINE n

$$I_m \cdot \underset{m\times n}{A} = A = \underset{m\times n}{A} \cdot I_n$$

$\boxed{4}$ $A(B+C) = AB + AC$

$\boxed{5}$ $(A+B)C = AC + BC$

$\boxed{6}$ $\alpha\,(AB) = (\alpha A)\cdot B = A\,(\alpha B)$

SOLO PERCHÉ α È UNO SCALARE

PROPRIETÀ DI CUI IL PRODOTTO <u>NON</u> GODE

$\boxed{1}$ IL PRODOTTO (RIGHE PER COLONNE) <u>NON</u> È COMMUTATIVO (cioè $AB \neq BA$)

- $\exists AB \not\Rightarrow \exists BA$

$$\left.\begin{array}{l} A_{m\times n} \\ B_{n\times k}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists AB\ m\times k, \text{ ma se } k\neq m\ \nexists BA$$

- $\left.\begin{array}{l} \exists AB \\ \exists BA\end{array}\right\} \not\Rightarrow$ AB e BA hanno le stesse dimensioni

$$\left.\begin{array}{l} A_{m\times n} \\ B_{n\times m}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\exists AB\ m\times m \\ \exists BA\ n\times n\end{array}$$

ma se $m\neq n$ allora AB e BA non hanno le stesse dimensioni, in particolare $AB \neq BA$

- Ma anche se A e B sono entrambe $m\times m$, per cui $\exists AB$ $m\times m$ ed $\exists BA$ $m\times m$, non è detto che AB sia uguale a BA.

ESEMPIO

$$AB = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6\end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4+3\cdot 2 & 2\cdot 3+3\cdot 6 \\ (-1)\cdot 4+6\cdot 2 & (-1)\cdot 3+6\cdot 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 24 \\ 8 & 33\end{bmatrix}$$

$$\neq \qquad \qquad \qquad \neq$$

$$BA = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6\end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 4\cdot 2+3\cdot(-1) & \cdots \\ \cdots & \cdots\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \cdots \\ \cdots & \cdots\end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ NON VALE LA LEGGE DI CANCELLAZIONE

ossia $\left.\begin{array}{l} AB = \mathbb{O} \\ A \neq \mathbb{O} \end{array}\right\} \not\Rightarrow B = \mathbb{O}$

anche $\left.\begin{array}{l} AB = \mathbb{O} \\ B \neq \mathbb{O} \end{array}\right\} \not\Rightarrow A = \mathbb{O}$

ESEMPIO

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 6 + 3\cdot(-4) & 2\cdot(-3)+3\cdot 2 \\ 4\cdot 6 + 6\cdot(-4) & 4\cdot(-3)+6\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$$

PER CASA: ESERCIZIO 2 (file: I19casaT3.pdf)

LA TRASPOSTA

Sia $A = (a_{ij})$ $m \times n$

Def La TRASPOSTA DI A è $B = (b_{ij})$ $n \times m$ tale che

$$b_{ij} = a_{ji}$$

Si indica $B = A^T$

ESEMPIO $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 1-i \\ 7i & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 7i \\ 2+3i & 0 \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}$

Per questo $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v}^T = [v_1 \ v_2 \cdots v_m]$