G.PARMEGGIANI 15/3/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

LA CONIUGATA E LA H-TRASPOSTA

Sia $A=(a_{ij})$ $m\times n$

Def La CONIUGATA DI A è $B=(b_{ij})$ $m\times n$ tale che

$$b_{ij}=\overline{a_{ij}}$$

Si indica $B=\overline{A}$

ESEMPIO

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2+3i & 1-i\\ 7i & 0 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A}=\begin{bmatrix}\overline{1} & \overline{2+3i} & \overline{1-i}\\ \overline{7i} & \overline{0} & \overline{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2-3i & 1+i\\ -7i & 0 & 4\end{bmatrix}$$

Def La H-TRASPOSTA DI A è $B=(b_{ij})$ $n\times m$

dove $b_{ij}=\overline{a_{ji}}$

Si indica $B=A^H$

ESEMPIO $A=\begin{bmatrix}1 & 2+3i & 1-i\\ 7i & 0 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow$

$$A^H=\overline{A^T}=\begin{bmatrix}\overline{1} & \overline{7i}\\ \overline{2+3i} & \overline{0}\\ \overline{1-i} & \overline{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -7i\\ 2-3i & 0\\ 1+i & 4\end{bmatrix}$$

anche $A^H=\overline{A}^T=\begin{bmatrix}1 & 2-3i & 1+i\\ -7i & 0 & 4\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & -7i\\ 2-3i & 0\\ 1+i & 4\end{bmatrix}$

$\boxed{\text{PER CASA: ESERCIZIO 3 (file: I19casaT3.pdf)}}$

PROPRIETÀ DELLE TRASPOSTE, DELLE CONIUGATE E DELLE H-TRASPOSTE

Come si comportano l'operatore TRASPOSIZIONE, l'operatore CONIUGIO e l'operatore H-TRASPOSIZIONE rispetto alla somma, al prodotto ed al prodotto per scalari

Siano A, B matrici; α scalare

Si suppongono che tutte le operazioni scritte siano possibili.

TRASPOSTE

$\boxed{1}$ $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

$\boxed{2}$ $(A+B)^T = A^T + B^T$

$\boxed{3}$ $(A^T)^T = A$

$\boxed{4}$ $(AB)^T = B^T A^T$

ATTENZIONE!

CONIUGATE

$\boxed{1}$ $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha} \cdot \overline{A}$

$\boxed{2}$ $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$

$\boxed{3}$ $\overline{\overline{A}} = A$

$\boxed{4}$ $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

H-TRASPOSTE

$\boxed{1}$ $(\alpha A)^H = \overline{\alpha} \cdot \overline{A}$

ATTENZIONE!

$\boxed{2}$ $(A+B)^H = A^H + B^H$

$\boxed{3}$ $(A^H)^H = A$

$\boxed{4}$ $(AB)^H = B^H A^H$

ATTENZIONE!

TIPI DI MATRICI E NOTAZIONI

L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ (rispettivamente: a coefficienti in $\mathbb{C}$) viene indicato con

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad \text{oppure} \quad M_{m,n}(\mathbb{R})$$

(rispettivamente: $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ oppure $M_{m,n}(\mathbb{C})$).

Se $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$

N.B. Quando non specifico se i coefficienti sono in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$, sottintendendo che siano in $\mathbb{C}$ (la MATRICE "E' COMPLESSA"); se invece voglio limitare i coefficienti in $\mathbb{R}$, lo dico specificamente (la MATRICE "E' REALE")

$\boxed{1}$ A si dice QUADRATA se $n = m$

se A è quadrata $n \times n$, il numero n si chiama L'ORDINE DELLA MATRICE

Invece di scrivere $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ (rispettivamente: $M_{n\times n}(\mathbb{R})$)

si scrive $M_n(\mathbb{C})$ (rispettivamente: $M_n(\mathbb{R})$).

Quindi $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$ = insieme delle matrici 2×3 a coeff. in $\mathbb{C}$

$M_{2,3}(\mathbb{C})$ = //

$M_{23}(\mathbb{C})$ = // 23×23 //

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1-i \\ 0 & 2+3i & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

DIAGONALE PRINCIPALE

Per noi "la diagonale principale" sarà "LA DIAGONALE".

In A, $7, 2+3i, 2$ sono i coefficienti diagonali

$\boxed{2}$ $A = (a_{ij})$ $m \times n$ si dice **DIAGONALE** se

1) è quadrata (ossia $n = m$)

2) tutti i suoi coefficienti che non sono diagonali uguali a 0 (ossia $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$)

Per le matrici diagonali si preferisce usare la lettera D:

$$\cancel{A = (a_{ij})} \rightsquigarrow \underset{\text{diagonale}}{D = (d_{ij})} = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{22} & \\ 0 & & \ddots \ d_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \ d_n \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

qui 0 indica una matrice, una "triangolo" di 0

ESEMPIO

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

NON DIAGONALE — DIAGONALE — NON DIAGONALE — DIAGONALE

$\boxed{3}$ A si dice **SCALARE** se $A = \mathrm{Diag}(d, d, \dots, d)$

$$\underset{n \times n}{A} = \begin{bmatrix} d & & 0 \\ & d & \\ 0 & & \ddots \ d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \ 1 \end{bmatrix} = d \cdot I_n$$

ESEMPIO $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{4}$ $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ **VETTORE COLONNA**

Invece di scrivere $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ si scrive $\mathbb{C}^n$

" $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ " $\mathbb{R}^n$

$\underline{v}^T = [v_1 \dots \dots v_n]$ VETTORE RIGA

Invece di scrivere $M_{1\times n}(\mathbb{C})$ si scrive $\mathbb{C}_n$

" $M_{1\times n}(\mathbb{R})$ " $\mathbb{R}_n$

$\boxed{5}$ Caso particolare: i VETTORI COORDINATI

$$\underline{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-esima riga}$$

nel simbolo non c'è l'informazione di quante sono le righe, per cui:

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ etc}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ etc.}$$

$$\underline{e}_i^T = [0 \dots\dots 0 \ \underset{\uparrow}{1} \ 0 \dots\dots 0]$$

i-esima colonna

$\boxed{6}$ A si dice SIMMETRICA se $A^T = A$.

N.B $A_{m\times n} \Rightarrow A^T_{n\times m}$ per cui

A simmetrica $\Rightarrow n = m$: A quadrata

(ma A quadrata $\not\Rightarrow$ A simmetrica)

non simmetriche

simmetrica

ESEMPIO $\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$ $\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

A si dice ANTISIMMETRICA se $A^T = -A$

A si dice HERMITIANA se $A^H = A$

A si dice ANTIHERMITIANA se $A^H = -A$

SCRITTURA MATRICIALE DI UN SISTEMA LINEARE

Dato il sistema lineare di

m equazioni

n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$

PARENTESI:

$2x_1^2 + \cancel{3x_2} + 5x_3 = 32$ ← NON E' UN'EQUAZIONE LINEARE di 1° grado

$2x_1x_2 + \cancel{3x_2} + 5x_3 = 32$ ← NON E' UN'EQUAZIONE LINEARE

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 32$ ← E' UN'EQUAZIONE LINEARE in 3 incognite

$2x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 32$

anche questa è lineare. "manca" x_3: c'è l'addendo $0 \cdot x_3$

CHIUSA PARENTESI

Dato il sistema lineare di

m equazioni in

n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

la matrice

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

si chiama LA MATRICE DEI COEFFICIENTI di $(*)$

il vettore

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m$$

si chiama IL VETTORE DEI TERMINI NOTI di $(*)$

il vettore

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

si chiama IL VETTORE DELLE INCOGNITE di $(*)$

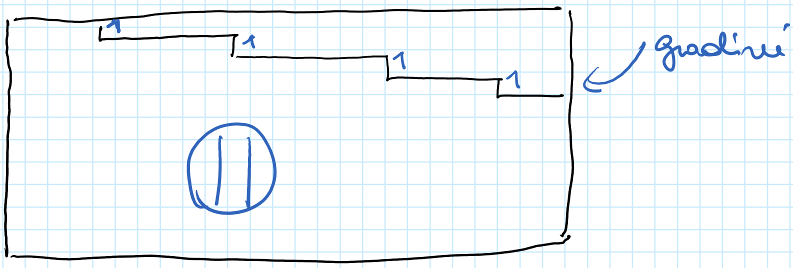
Facendo il prodotto di $\underset{m\times n}{A}$ per $\underset{m\times 1}{\underline{x}}$ si ottiene:

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

per cui $A\underline{x} = \underline{b}$ è una forma compatta per scrivere (*), e si chiama LA SCRITTURA MATRICIALE DEL SISTEMA LINEARE (*).

ALGORITMO DI GAUSS
O ELIMINAZIONE DI GAUSS (E.G.)

Data una matrice A $m\times n$, L'OBIETTIVO è "trasformare" A in una matrice della forma:

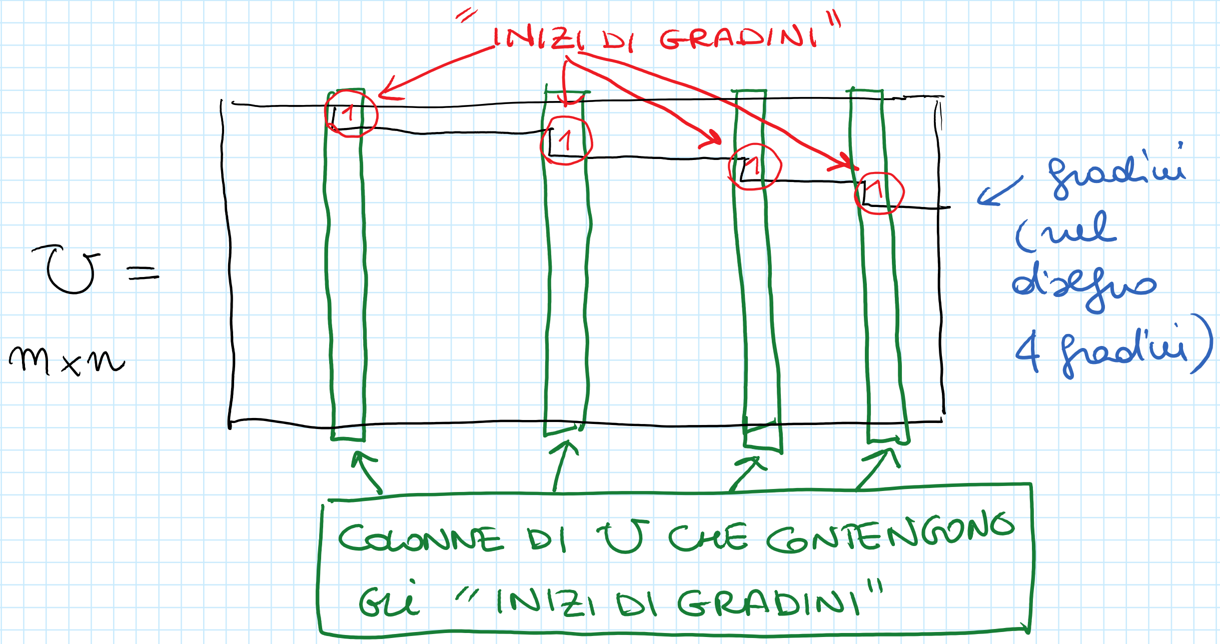
$U =$ 

① a "gradini": sotto ai gradini tutti i coefficienti sono uguali a 0

② ogni gradino è "alto" una riga (nel disegno ho 4 gradini)

③ ogni gradino inizia con il numero 1

Ogni matrice U trovata a partire da A con il procedimento che descriveremo si chiama UNA FORMA RIDOTTA DI GAUSS PER LA MATRICE A



Una colonna di U CHE CONTIENE un "inizio di gradino" si chiama **UNA COLONNA DOMINANTE DI U**

Una colonna di U CHE NON CONTIENE un "inizio di gradino" si chiama **UNA COLONNA LIBERA DI U**

NB il numero delle colonne dominanti di U = il numero dei gradini di U = il numero delle righe non nulle di U

"TRASFORMARE" significa "APPLICARE RIPETUTAMENTE OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE"