G.PARMEGGIANI 19/3/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

LE OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE DI UNA MATRICE A sono:

1 Sommare alla i-esima riga di A la j-esima riga di A moltiplicata per uno scalare c $\boxed{\text{DOVE } i \neq j}$

ESEMPIO $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Se sommo alla 2^a $(i=2)$ riga di A (ossia $[2\ 6\ 2]$)

la 1^a $(j=1)$ riga di A (ossia $[1\ 3\ 4]$)

moltiplicata per -2 $(c=-2)$ ottengo $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} &[2\ \ 6\ \ 2] + [1\ \ 3\ \ 4](-2) = \\ &= [2\ \ 6\ \ 2] + [-2\ \ -6\ \ -8] = \\ &= [0\ \ 0\ \ -6] \end{aligned}}$$

scriverò $A \xrightarrow[E_{ij}(c)]{} B$ per dire che B è il risultato di questa operazione su A

nell'esempio: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ moltiplicare la i-esima riga di A per uno scalare $\boxed{c \neq 0}$

ESEMPIO $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

"divido" la 2ª ($i=2$) riga A per 2: ovvero MOLTIPLICO la 2ª riga di A per $c = \frac{1}{2}$:

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad [2 \;\; 6 \;\; 2] \cdot \frac{1}{2} = [1 \;\; 3 \;\; 1]$

scriverò $A \xrightarrow[E_i(c)]{} B$ per dire che B è il risultato di questa operazione su A

nell'esempio: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_2(\frac{1}{2})]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$ scambiare la i-esima riga di A con la j-esima riga di A

ESEMPIO $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ scambio la 2ª riga con la 1ª: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

scriverò: $A \xrightarrow[E_{ij}]{} B$ per dire che B è il risultato di questa operazione su A

nell'esempio: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{12}]{} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; altro esempio: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{13}]{} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{N.B}}$ $E_{ij} = E_{ji}$

ESEMPIO Trovare una forma ridotta di Gauss

per $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 14 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

"faccio diventare 1" questo 2

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -4 & 14 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ \boxed{1} & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

"trasformo questa colonna in $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ partendo dalla 1^a riga"

"faccio diventare 0" questo 1 "GUARDANDO ALLA 1^a RIGA"

① se invece avessi avuto $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 14 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ avrei dovuto fare uno scambio di righe

② se invece avessi avuto $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 14 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ fare' partito da moltiplicando la 1^a riga per $-\frac{1}{4}$

$$\xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -5 \\ \boxed{-1} & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)}$$

"faccio diventare 0" questo -1 "GUARDANDO ALLA 1^a RIGA"

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & \boxed{5} & -5 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2\left(\frac{1}{5}\right)}$$

"trasformo" questa colonna in $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ partendo dalla 2^a riga

"faccio diventare 1" questo 5

① se invece avessi avuto $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ avrei dovuto fare uno scambio di righe

② se invece avessi avuto $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ guarderei adesso questa colonna e moltiplicherei la 2^a riga per $-\frac{1}{5}$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(2)]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

una forma ridotta di Gauss per A

"faccio diventare 0" questo -2

"GUARDANDO ALLA 2ª RIGA"

COLONNE DOMINANTI

COLONNA LIBERA

"Riassumendo" raggruppo le operazioni necessarie "a sistemare" ogni colonna dominante:

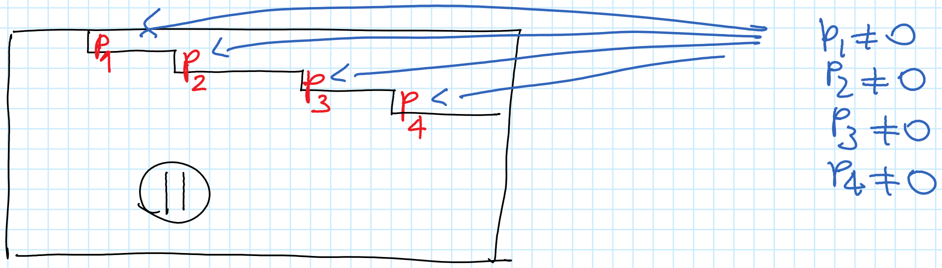
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 14 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1)E_{21}(-1)E_1\left(\frac{1}{2}\right)]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(2)\,E_2\left(\frac{1}{5}\right)]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

ATTENZIONE ALL'ORDINE (le scrivo DA DESTRA A SINISTRA)

PER CASA: ESERCIZIO 4 (file: I19casaT3.pdf)

NB Nel libro di testo, nelle EG non vengono usati i passaggi $E_i(c)$ $(c \neq 0)$, per cui le forme ridotte di Gauss ottenute sono del tipo



I numeri agli "inizi dei gradini" sono diversi da 0, ma non sono necessariamente uguali ad 1. Li chiamiamo PIVOT
(nel disegno: $p_1 = 1^\circ$ PIVOT, $p_2 = 2^\circ$ PIVOT, $p_3 = 3^\circ$ PIVOT, $p_4 = 4^\circ$ PIVOT)

NB Possono esserci diverse forme ridotte di Gauss per una stessa matrice A. QUESTO PUÒ ACCADERE SOLO SE

(1) NELLA EG SU A È <u>NECESSARIO</u> FARE SCAMBI DI RIGHE

(2) C'È UNA <u>POSSIBILITÀ DI SCELTA</u> NEGLI SCAMBI DA FARE

ESEMPIO Trovare una forma ridotta di Gauss per

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Per "trasformare" la 1^a colonna $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ <u>DEVO</u> fare uno scambio di righe e <u>POSSO SCEGLIERE</u> tra E_{12} ed E_{13}

SE SCELGO E_{12}:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}]{} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{3})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}]{}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2(\frac{1}{2})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(\frac{1}{2})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_1$$

U_1 è una forma ridotta di Gauss per A

SE INVECE ALL'INIZIO AVESSI SCELTO E_{13}:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{13}]{} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-3)\,E_1(\frac{1}{2})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_2(-\frac{1}{3})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(\frac{1}{2})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_2$$

U_2 è una forma ridotta di Gauss per A

N.B.: $U_2 \neq U_1$!

RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

$A\underline{x} = \underline{b}$ sistema lineare con A $m \times n$ e $\underline{b}$ $m \times 1$

Per risolverlo:

$\boxed{1}$ Scrivere la matrice $[A \mid \underline{b}]$ = MATRICE AUMENTATA
$m \times (n+1)$ DEL SISTEMA $A\underline{x} = \underline{b}$

(2) fare una EG su $[A \mid \underline{b}]$:

$$[A \mid \underline{b}] \underset{EG}{\rightsquigarrow} [U \mid \underline{d}] = \text{una forma ridotta di Gauss per } [A \mid \underline{b}]$$

$\boxed{NB}$ Le operazioni elementari sulle righe della matrice aumentata $[A \mid \underline{b}]$ corrispondono alle "OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE EQUAZIONI DEL SISTEMA"

Tali operazioni "non modificano le soluzioni del sistema"

(Cioè: $A\underline{x}=\underline{b}$ ha matrice aumentata $[A|\underline{b}]$.
Se $[U|\underline{d}]$ è una forma ridotta di Gauss di $[A|\underline{b}]$, allora
$A\underline{x}=\underline{b}$ è EQUIVALENTE ad $U\underline{x}=\underline{d}$)

"equivalente" vuol dire "con le stesse soluzioni" (eventualmente nessuna)

cioè quel sistema che ha $[U|\underline{d}]$ come matrice aumentata

LE OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE EQUAZIONI DEL SISTEMA SONO:

$\boxed{1}$ Sommare ad un'equazione un'altra moltiplicata per uno scalare c

ESEMPIO:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_3 = 4 \end{cases}$$

voglio eliminare x_1 dalla 2ª equazione: sommo alla 2ª equazione la 1ª moltiplicata per (-2)

matrice aumentata

operazione sulle righe della matrice

matrice aumentata

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 10 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{21}(-2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

$\boxed{2}$ e $\boxed{3}$ la prossima volta