G. Parmeggiani **17/5/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Svolgimento degli Esercizi per casa 10

$\boxed{\mathbf{1}}$ Siano

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver provato che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, si calcolino le matrici di passaggio

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \text{ (da } \mathcal{B}' \text{ a } \mathcal{B}\text{) e } \mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \text{ (da } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B}'\text{)}.$$

Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le matrici che hanno come colonne gli elementi di $\mathcal{B}$ e di $\mathcal{B}'$ rispettivamente. Per provare che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, occorre provare che $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{A}'$ hanno entrambe rango uguale a 3.

Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

per cui rk($\mathbf{A}$)=rk($\mathbf{U}$) $= 3$, ed, analogamente, facendo una E.G. su $\mathbf{A}'$ si ottiene:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}'$$

per cui rk($\mathbf{A}'$)=rk($\mathbf{U}'$) $= 3$.

La matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}'}$ da $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ a $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}'} &= \begin{pmatrix} C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\mathbf{v_1'}) & C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\mathbf{v_2'}) & C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\mathbf{v_3'}) \end{pmatrix} = \\ &= \left(C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right). \end{aligned}$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ e $C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, calcoliamo $C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \alpha + \beta + \delta \\ \beta + \delta \end{pmatrix},$$

α, β e δ sono soluzioni del sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = a \\ \alpha + \beta + \delta = b \\ \beta + \delta = c \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla matrice aumentata di $(*)$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & c-a+b \end{array}\right)$$

da cui, con la sostituzione all'indietro,

$$\begin{cases} \delta = c - a + b \\ \beta = a - b \\ \alpha = -2\beta - \delta + a = -2a + 2b - c + a - b + a = b - c \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b - c \\ a - b \\ c - a + b \end{pmatrix}$, per cui

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente si ha:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \left(C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right),$$

ma dal momento che $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$, calcoliamo $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ usando l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \mid \mathbf{I}_3\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-1)} \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)} \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(1/2)} \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}(1)} .
\end{aligned}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right).$$

Dunque $\quad \mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

lo spazio vettoriale reale considerato nell'esercizio 4 degli "Esercizi 9". Siano

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di W (N.B.: $\mathcal{B}'$ è la $\mathcal{D}$ considerata nell'esercizio 4 degli "Esercizi 9". Non si richiede di verificare che anche $\mathcal{B}$ è una base di W). Si calcoli la matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$).

La matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \left(C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \right)$$

Nell'esercizio 4 degli "Esercizi 9"abbiamo calcolato (la $\mathcal{B}'$ di questo esercizio è la $\mathcal{D}$ considerata in quell'esercizio):

$$C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

per cui

$$C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e}$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad T rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v_1}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \text{ e}$$

$$\mathcal{D}' = \left\{ \mathbf{w_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_2}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_3}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice $\mathbf{A}'$ associata ad T rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{D}'$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$$

dove

$\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}$ e
$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Per calcolare

$$\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w_1}) & C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w_2}) & C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w_3}) \end{pmatrix},$$

calcoliamo prima le coordinate rispetto a $\mathcal{D}'$ di un generico $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ -\beta \\ \delta \end{pmatrix}$$

Dal momento che

$$\begin{cases}\alpha+\beta &= a\\ -\beta &= b\\ \delta &= c\end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases}\delta &= c\\ \beta &= -b\\ \alpha &= a-\beta = a+b\end{cases}$$

otteniamo: $C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}a+b\\-b\\c\end{pmatrix}$.

In particolare, specializzando a $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$ e $\mathbf{w_3}$;

$C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w_1}) = C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$,

$C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w_2}) = C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,

$C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w_3}) = C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$,

per cui

$$\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}'\leftarrow\mathcal{D}} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Per calcolare $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \big(C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v_1'}) \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v_2'})\big)$, calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di un generico $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha-\beta\\\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

Dal momento che

$$\begin{cases}\alpha-\beta &= a\\ \alpha+\beta &= b\end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases}2\alpha = a+b\\ 2\beta = b-a\end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases}\alpha = (a+b)/2\\ \beta = (b-a)/2\end{cases}$$

otteniamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}(a+b)/2\\(b-a)/2\end{pmatrix}$.

In particolare, specializzando a $\mathbf{v_1'}$ e $\mathbf{v_2'}$:

$$C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v_1'}) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v_2'}) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},$$

per cui $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}'} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $\mathbf{A}'$ che cerchiamo è quindi

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\boldsymbol{\mathcal{D}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}'} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}'} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 18 \\ -4 & -3 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$