

Svolgimento degli Esercizi per casa 11

1 Sapendo che la posizione $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^4 \bar{a}_i b_i.$$

definisce un prodotto scalare, si consideri la norma $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ da esso indotta. Si trovino tutte le matrici complesse scalari \mathbf{A} di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

La norma $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ indotta dal prodotto scalare è definita da:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \bar{a}_i \cdot a_i} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^4 |a_i|^2} \quad \forall \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Una matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ è scalare se e solo se $a_2 = a_3 = 0$ ed

$a_1 = a_4 = \alpha$ per un opportuno $\alpha \in \mathbb{C}$, ossia se e solo se

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} \mid \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Dal momento che

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2} &\iff \sqrt{|\alpha|^2 + |0|^2 + |0|^2 + |\alpha|^2} = 2\sqrt{2} \\ &\iff |\alpha|\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ &\iff |\alpha| = 2, \end{aligned}$$

le matrici complesse scalari \mathbf{A} di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tale che } |\alpha| = 2.$$

N.B. I numeri complessi α tali che $|\alpha| = 2$ sono tutti e soli quei numeri complessi che corrispondono ai punti nel piano di Gauss che stanno sulla circonferenza di centro 0 e raggio 2. In particolare, ci sono infiniti numeri complessi α tali che $|\alpha| = 2$, per cui ci sono infinite matrici complesse scalari \mathbf{A} di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

2 Sapendo che la posizione $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \bar{x}_1 y_1 + 2\bar{x}_2 y_2$$

definisce un prodotto scalare, sia $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norma da esso indotta. Si trovino tutti i vettori $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tali che $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$.

La norma $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ indotta da $(\cdot|\cdot)$ è definita da

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\bar{x}_1 x_1 + 2\bar{x}_2 x_2} = \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2}.$$

Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Essendo $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2}$ e

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}} = \sqrt{(\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2},$$

allora

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 &\iff \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \\ &\iff |x_1|^2 + 2|x_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \\ &\iff |x_2|^2 = 0 \\ &\iff x_2 = 0. \end{aligned}$$

Dunque

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^2 \mid \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\} = \langle \mathbf{e}_1 \rangle.$$

3 Si trovi una base ortonormale del sottospazio

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di \mathbb{C}^4 .

I Costruiamo dapprima **una base di V**: poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4) = \begin{pmatrix} i & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ i & -1 & 1 & 2i \\ -1 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(1)E_{31}(-i)E_{21}(1)E_1(-i)} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2}i)E_{42}(i)E_2(i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U} \end{aligned}$$

Poichè \mathbf{U} ha come colonne dominanti la 1^a , la 3^a e la 4^a , allora una base di $C(\mathbf{A}) = V$ è $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_3; \mathbf{w}_4\}$.

II Troviamo **una base ortogonale di V** applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \\ &= \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}i\mathbf{u}_1 = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}i \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (-i \quad -1 \quad -i \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (-i \quad -1 \quad -i \quad -1) \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\implies \alpha_{12} = -\frac{2i}{4} = -\frac{1}{2}i$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_3 = (-i \quad -1 \quad -i \quad -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = 4$$

$$\implies \alpha_{13} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) &= \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_3 = \frac{1}{2} (1 \quad i \quad 1 \quad i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = i \\
(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} (1 \quad i \quad 1 \quad i) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = 1 \\
\implies \alpha_{23} &= i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \\
&= \mathbf{v}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}i\mathbf{u}_2 = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dunque

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortogonale di V .

III Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto **II**, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in **II** per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 ed \mathbf{u}_3 :

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{u}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)} = \sqrt{(i \quad 0 \quad -i \quad 0) \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}; \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2} \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di V .

4 Si consideri il sottospazio

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $M_2(\mathbb{C})$. Si trovi una base ortonormale di W rispetto al prodotto scalare $(\cdot | \cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ definito nell'esercizio **1**.

Il prodotto scalare su $M_2(\mathbb{C})$ definito nell'esercizio **1** è: $(\cdot | \cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ con

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^4 \bar{a}_i b_i$$

e la norma da esso indotta è: $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ con

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right)} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^4 \bar{a}_i \cdot a_i} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^4 |a_i|^2} \quad \forall \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}$.

Poichè $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è un insieme di generatori di W ,

I troviamo una base \mathcal{B} di W contenuta in \mathcal{S} .

Esistono elementi di \mathcal{S} che siano combinazioni lineari dei rimanenti?

Sia $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di \mathcal{S} . Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & 2i\alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & (1+2i)\alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2i\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ (1+2i)\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione quella nulla (ossia $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$).

Dunque \mathcal{S} è L.I., per cui $\mathcal{B} = \mathcal{S}$ è una base di W .

II troviamo **una base ortogonale di W** applicando a $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ l'algoritmo di Gram-Schmidt (dove il prodotto scalare

$$(\cdot | \cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

è definito sopra).

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1 | \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1 | \mathbf{v}_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \bar{1} \cdot 1 + \bar{0} \cdot 2i + \bar{0} \cdot 0 + \bar{0} \cdot 0 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2i + 0 + 0 = 1$$

$$(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \bar{1} \cdot 1 + \bar{0} \cdot 0 + \bar{0} \cdot 0 + \bar{0} \cdot 0 = 1 \cdot 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1 | \mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right) = \bar{1} \cdot 0 + \bar{0} \cdot 1 + \bar{0} \cdot 0 + \bar{0} \cdot (1+2i) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 + 0 \cdot (1+2i) = 0$$

$$\alpha_{13} = \frac{0}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right) = \bar{0} \cdot 0 + \bar{2i} \cdot 1 + \bar{0} \cdot 0 + \bar{0} \cdot (1+2i) = 0 - 2i \cdot 1 + 0 + 0 \cdot (1+2i) = -2i$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \bar{0} \cdot 0 + \bar{2i} \cdot 2i + \bar{0} \cdot 0 + \bar{0} \cdot 0 = 0 - 4i^2 + 0 + 0 = -4i^2 = -4(-1) = 4$$

$$\alpha_{23} = \frac{-2i}{4} = -\frac{i}{2}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3 + i\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}}$$

Dunque

$$\mathcal{B}_1 \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortogonale di W .

III Costruiamo **base ortonormale di W** normalizzando la base ortogonale \mathcal{B}_1 trovata al punto **II**, ossia dividendo ciascun elemento di \mathcal{B}_1 per la propria norma (dove la norma è quella indotta dal prodotto scalare).

Cominciamo con il calcolare la norma di \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 ed \mathbf{u}_3 :

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_3\| &= \sqrt{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)} = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right)} = \\ &= \sqrt{\bar{0} \cdot 0 + \bar{0} \cdot 0 + \bar{0} \cdot 0 + \overline{(1+2i)} \cdot (1+2i)} = \\ &= \sqrt{0+0+0+(1-2i)(1+2i)} = \sqrt{1-(2i)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^* &= \left\{ \mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}; \mathbf{u}_3^* = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \right\} = \\ &= \left\{ \mathbf{u}_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

è una base ortonormale di W .

5 Siano

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si trovino basi di V_1^\perp e V_2^\perp .

(a) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ allora $C(\mathbf{A}) = V_1$ e $V_1^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su \mathbf{A}^H otteniamo:

$$\mathbf{A}^H = (0 \quad -i \quad 2) \xrightarrow{E_1(i)} (0 \quad 1 \quad 2i) = \mathbf{U}$$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{U})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 3 - 1 = 2,$$

una base di V_1^\perp ha 2 elementi (d'altra parte $\dim V_1 = 1$ e $\dim \mathbb{C}^3 = 3$, per cui a priori potevamo dedurre che $\dim V_1^\perp = \dim \mathbb{C}^3 - \dim V_1 = 3 - 1 = 2$).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \iff x_2 + 2ix_3 = 0$$

quindi

$$N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ -2ik \\ k \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Una base di V_1^\perp è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora $C(\mathbf{A}) = V_2$ e $V_2^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su \mathbf{A}^H otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^H &= \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ -i & -1 & -i & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(i)} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)E_2(-i)} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U} \end{aligned}$$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{A})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 4 - 2 = 2,$$

una base di V_2^\perp ha 2 elementi.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \iff \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 - ix_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$V_2^\perp = N(\mathbf{A}^H) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ -k \\ h \\ k \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{C} \right\}$$

ed una sua base è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

6 Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ come nell'esercizio **4**. Si trovi il complemento ortogonale W^\perp di W in $M_2(\mathbb{C})$ rispetto al prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$.

Il complemento ortogonale di W in $M_2(\mathbb{C})$ è

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in M_2(\mathbb{C}) \mid (\mathbf{a}|\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W\}.$$

Dal momento che

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W , allora

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in M_2(\mathbb{C}) \mid (\mathbf{v}_i|\mathbf{v}) = 0 \quad \text{per } i = 1, 2, 3\}.$$

Se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right) = \bar{1} \cdot a_1 + \bar{0} \cdot a_2 + \bar{0} \cdot a_3 + \bar{0} \cdot a_4 = \\ &= 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = \\ &= a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_2|\mathbf{v}) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right) = \bar{1} \cdot a_1 + \overline{2i} \cdot a_2 + \bar{0} \cdot a_3 + \bar{0} \cdot a_4 = \\ &= 1 \cdot a_1 - 2i \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = \\ &= a_1 - 2ia_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_3|\mathbf{v}) &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right) = \bar{0} \cdot a_1 + \bar{1} \cdot a_2 + \bar{0} \cdot a_3 + \overline{1+2i} \cdot a_4 = \\ &= 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + (1-2i) \cdot a_4 = \\ &= a_2 + (1-2i)a_4 \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} W^\perp &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid a_1 = a_1 - 2ia_2 = a_2 + (1-2i)a_4 = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid a_1 = a_2 = a_4 = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

7] Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ sul sottospazio

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di \mathbb{C}^3 .

I] Troviamo una base ortonormale di U .

Poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3) &= \begin{pmatrix} i & 8i & 7i \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-i)} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)E_{32}(i)E_2(-\frac{1}{8})} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U} \end{aligned}$$

Poichè \mathbf{U} ha come colonne dominanti la 1^a e la 2^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = U$ è $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2\}$.

Applichiamo ora l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

per trovare una base ortogonale di U .

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = (-i)8i = 8$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-i)i + 1 = 2$$

$$\implies \alpha_{12} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 =$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{v}_2 - 4\mathbf{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di U .

Costruiamo base ortonormale di U normalizzando la base ortogonale $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\}$, ossia dividendo ciascun suo elemento per la sua norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di \mathbf{u}_1 ed \mathbf{u}_2 :

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{\begin{pmatrix} -4i & -4 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{16 + 16 + 1 + 1} = \sqrt{34}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di U .

La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ su U è

$$P_U(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^* | \mathbf{v}) \mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^* | \mathbf{v}) \mathbf{u}_2^*$$

dove

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1^* | \mathbf{v}) &= (\mathbf{u}_1^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i \quad 1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((-i)2i - 6) = -\frac{4}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_2^* | \mathbf{v}) &= (\mathbf{u}_2^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{34}} (-4i \quad -4 \quad i \quad 1) \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{34}} (-4i2i - 4(-6) + i8i + 10) = \sqrt{34} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} P_U(\mathbf{v}) &= -\frac{4}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_1^* + \sqrt{34} \mathbf{u}_2^* = -\frac{4}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{34} \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= -2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8 Siano W e $(\cdot | \cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ come nell'esercizio **4**. Si calcoli la proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ di

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

su W rispetto al prodotto scalare $(\cdot | \cdot)$.

Nell'esercizio 4 abbiamo trovato che

$$\left\{ \mathbf{u}_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di W (rispetto al prodotto scalare $(\cdot | \cdot)$ ed alla norma da esso indotta su $M_2(\mathbb{C})$).

La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$ su W è

$$P_W(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^* | \mathbf{v}) \mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^* | \mathbf{v}) \mathbf{u}_2^* + (\mathbf{u}_3^* | \mathbf{v}) \mathbf{u}_3^*$$

dove

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1^* | \mathbf{v}) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \bar{1} \cdot 1 + \bar{0} \cdot i + \bar{0} \cdot 2i + \bar{0} \cdot 3\sqrt{5} = \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot 2i + 0 \cdot 3\sqrt{5} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_2^* | \mathbf{v}) &= \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \bar{0} \cdot 1 + \bar{i} \cdot i + \bar{0} \cdot 2i + \bar{0} \cdot 3\sqrt{5} = \\ &= 0 \cdot 1 - i \cdot i + 0 \cdot 2i + 0 \cdot 3\sqrt{5} = -i^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_3^* | \mathbf{v}) &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \bar{0} \cdot 1 + \bar{0} \cdot i + \bar{0} \cdot 2i + \overline{\frac{1+2i}{\sqrt{5}}} \cdot 3\sqrt{5} = \\ &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot 2i + \frac{1-2i}{\sqrt{5}} \cdot 3\sqrt{5} = 3(1-2i) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} P_W(\mathbf{v}) &= \mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2^* + 3(1-2i)\mathbf{u}_3^* = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3(1-2i) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & \frac{3(1-2i)(1+2i)}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & \frac{3 \cdot 5}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9] Sia

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Si calcoli la matrice di proiezione su W .

(b) Si calcoli la matrice di proiezione sul complemento ortogonale W^\perp di W in \mathbb{C}^3 .

(a) La matrice di proiezione \mathbf{P} su W è la matrice $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H$ dove \mathbf{Q} è una matrice le cui colonne siano gli elementi di una **base ortonormale** di W .

I] Troviamo una base \mathcal{B}_1 di W .

Poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e costruiamo la matrice

$$\mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4) = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

ossia una matrice tale che $C(\mathbf{A}) = W$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\xrightarrow{E_{31}(1)E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9i \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_{32}(-9i)E_2(1/9)} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U} \end{aligned}$$

Dunque $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_4\}$ è una base di W .

II] Troviamo una base ortogonale \mathcal{B}_2 di W : poniamo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_4$ e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) &= \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (1 \quad -i \quad -1) \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= 9i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) &= \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (1 \quad -i \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\implies \alpha_{12} = 9i/3 = 3i$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \\ &= \mathbf{v}_2 - 3i\mathbf{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3i \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6i \\ 3 \\ 3i \end{pmatrix} = \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

Dunque $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ è una base ortogonale di W .

III Troviamo una base ortonormale \mathcal{B} di W normalizzando gli elementi di \mathcal{B}_2 .

Poichè

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{3},$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_2\|_2 &= \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{\mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2} = \sqrt{\begin{pmatrix} -6i & 3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6i \\ 3 \\ 3i \end{pmatrix}} = \\ &= \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54}, \end{aligned}$$

allora $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*\}$, dove

$$\mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{54}} \begin{pmatrix} 6i \\ 3 \\ 3i \end{pmatrix}$$

è una base ortonormale di W .

IV Costruiamo una matrice \mathbf{Q} che abbia come colonne gli elementi di \mathcal{B} :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{54}}i \\ \frac{1}{\sqrt{3}}i & \frac{3}{\sqrt{54}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{54}}i \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo l' H -trasposta \mathbf{Q}^H della matrice \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q}^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}i & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{54}}i & \frac{3}{\sqrt{54}} & -\frac{1}{\sqrt{54}}i \end{pmatrix}.$$

V La matrice di proiezione \mathbf{P} su W è:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{54}}i \\ \frac{1}{\sqrt{3}}i & \frac{3}{\sqrt{54}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{54}}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}i & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{54}}i & \frac{3}{\sqrt{54}} & -\frac{1}{\sqrt{54}}i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{36}{54} & -\frac{1}{3}i + \frac{18}{54}i & -\frac{1}{3} + \frac{18}{54} \\ \frac{1}{3}i - \frac{18}{54}i & \frac{1}{3} + \frac{9}{54} & -\frac{1}{3}i - \frac{9}{54}i \\ -\frac{1}{3} + \frac{18}{54} & \frac{1}{3}i + \frac{9}{54}i & \frac{1}{3} + \frac{9}{54} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) La matrice di proiezione sul complemento ortogonale W^\perp di W in \mathbb{C}^3 è:

$$\mathbf{I}_3 - \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$