G. Parmeggiani **31/5/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Svolgimento degli Esercizi per casa 12 (1^a parte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Conviene sviluppare $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$ rispetto alla riga o alla colonna che contengono piú zeri. In questo caso conviene svilupparlo ripetto alla 1^a riga oppure alla 3^a colonna. Facciamolo in entrambi i modi, per esercizio.

Rispetto alla 1^a riga:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\mathbf{A}) &= (2-i)(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (2-i)(1+i-3) - (2-3i) = (2-i)(-2+i) - 2 + 3i = \\ &= -4 + 2i + 2i - i^2 - 2 + 3i = -5 + 7i \end{aligned}$$

Rispetto alla 3^a colonna:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\mathbf{A}) &= 3(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} = \\ &= -3(2-i-i) + [(2-i)(1+i) - 2] = \\ &= -3(2-2i) + 2 - i + 2i - i^2 - 2 = \\ &= -6 + 6i + 2 - i + 2i + 1 - 2 = -5 + 7i \end{aligned}$$

Sviluppiamo $\mathrm{Det}(\mathbf{B})$, ad esempio rispetto alla 1^a colonna:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix} = i(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 1 \end{pmatrix} + i(-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= i(1-2i) + [1 - i(1+i)] + i[2-(1+i)] =$$

$$= i - 2i^2 + 1 - i - i^2 + 2i - i - i^2 =$$

$$= i + 2 + 1 - i + 1 + 2i - i + 1 =$$

$$= 5 + i$$

Infine sviluppiamo $\mathrm{Det}(\mathbf{C})$ ad esempio rispetto alla 3^a riga:

$$\mathrm{Det}\mathbf{C} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il primo addendo rispetto alla 2^a colonna, mentre il secondo ed il terzo addendo rispetto alla 1^a riga.

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= -(1+i-1) + 2(1+i-1) = -i + 2i = i$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -[2(1+i)-1] + (0-2) = -(2+2i-1) - 2 = -1 - 2i - 2 = -3 - 2i$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -[2(1+i)-1] + 2 - 1 = -(2+2i-1) + 1 = -1 - 2i + 1 = -2i$$

Quindi

$$\mathrm{Det}(\mathbf{C}) = i - (-3-2i) - 2i = i + 3 + 2i - 2i = 3 + i.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare (sugg.: si calcoli il determinante $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$).

$$(1) \qquad \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha)) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+4}(3\alpha-1)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -(3\alpha-1)\Big[(-1)^{1+1}2\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha-1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 4 & \alpha-1 \end{pmatrix}\Big] =$$

$$= -(3\alpha-1)\Big[2(\alpha-\alpha+1) - 4\alpha\Big] = -2(3\alpha-1)(1-2\alpha)$$

Poichè $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare se e solo se $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha)) \neq 0$, dal punto (1) otteniamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è non singolare} \quad \Longleftrightarrow \quad -2(3\alpha-1)(1-2\alpha) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$.

Si calcolino:
– gli autovalori di $\mathbf{A}$,
– le loro molteplicità algebriche e
– le loro molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$p_{\mathbf{A}}(x) = \mathrm{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_2) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -2i \\ 2i & -x \end{pmatrix} = (-x)^2 - (-2i)\cdot 2i = x^2 + 4i^2 =$$

$$= x^2 - 4.$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono gli zeri del polinomio carattaristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di $\mathbf{A}$, ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 4 = 0$$

sono -2 e 2, gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 1.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad d_2 = 1.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Si calcolino:
- gli autovalori di $\mathbf{A}$,
- le loro molteplicità algebriche e
- le loro molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 0 & 2i \\ 0 & -8-x & 0 \\ 2i & 0 & -6-x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{2+2}(-8-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & -6-x \end{pmatrix} = \\
&= (-8-x)[(-2-x)(-6-x) - 4i^2] = \\
&= (-8-x)(12 + 6x + 2x + x^2 + 4) = \\
&= (-8-x)(x^2 + 8x + 16) = \\
&= (-8-x)(x+4)^2.
\end{aligned}
$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di $\mathbf{A}$, ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$(-8-x)(x+4)^2 = 0$$

sono -8 e -4, gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -8 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -4.$$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = (-8-x)(-4-x)^2 = (\lambda_1 - x)^{m_1}(\lambda_2 - x)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad 1 \leq d_2 \leq 2.$$

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)) = \dim(E_{\mathbf{A}}(-4)) = \dim(N(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)) = \\
&= [\text{numero delle colonne di } (\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)] - [\mathrm{rk}(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)] = \\
&= 3 - [\mathrm{rk}(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)].
\end{aligned}
$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3 \quad$ otteniamo:

$$
\mathbf{A}+4\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to
$$

$$
\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

per cui

$$
\mathrm{rk}(\mathbf{A}+4\mathbf{I}_3) = \mathrm{rk}\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = 2
$$

e quindi

$$
d_2 = 3 - 2 = 1.
$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si trovino basi degli autospazi delle matrici considerate negli esercizi 3 e 4.

Le matrici considerate negli esercizi 3 e 4 sono:

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix},
$$

ed abbiamo calcolato:

matrice	**autovalori**	**molteplicità geometriche**
A	$\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$	$d_1 = d_2 = 1$
B	$\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = -4$	$d_1 = d_2 = 1$

In particolare, ciascuno degli autospazi $E_{\mathbf{A}}(\lambda_i)$ ed $E_{\mathbf{B}}(\lambda_i)$ per $i = 1, 2$ ha dimensione 1, per cui una sua base ha un unico elemento.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) = N(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2) = N\Big(\begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2 \quad : \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, segue

$$E_{\mathbf{A}}(-2) = N\Big(\begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} ih \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2) = N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2) = N\Big(\begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2 \quad : \begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(-\frac{1}{2})} \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, segue

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -ih \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(-8) = N(\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3 \quad :$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{6})} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_2(\frac{3}{8})E_{23}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N\Big(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(-8)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(-4) = N(\mathbf{B} + 4\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B}+4\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(-4) = N\Big(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix}\Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = \Big\{\begin{pmatrix} -ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C}\Big\},$$

e quindi $\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(-4)$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si calcolino gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Siano $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ le matrici che si ottengono ponendo $\alpha = 2$ ed $\alpha = -8$ rispettivamente. Si trovino basi degli autospazi di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$.

(a) Gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono gli zeri del suo polinomio caratteristico. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \\ &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 \\ 1 & \alpha - x & -1 \\ 7 & 0 & -5-x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{2+2}(\alpha - x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -1-x & 3 \\ 7 & -5-x \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha - x)[(-1-x)(-5-x) - 21] = \\ &= (\alpha - x)(5 + 5x + x + x^2 - 21) = \\ &= (\alpha - x)(x^2 + 6x - 16). \end{aligned}$$

L'equazione $\alpha - x = 0$ ha un'unica souzione: α.

L'equazione $x^2 + 6x - 16 = 0$ ha due soluzioni distinte: -8 e 2.

Quindi otteniamo:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{-8, 2\}$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = \alpha$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$
$\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$

Per finire di rispondere alla domanda (a) resta da calcolare:

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(2)}(\lambda_2)) = \dim(E_{\mathbf{A}}(2)) \quad \text{e}$$

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(\lambda_1)) = \dim(E_{\mathbf{B}}(-8)).$$

dove

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}(-8).$$

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}}(2)) = \dim(N(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3) = \\ &= [(\text{numero di colonne di } \mathbf{A}-2\mathbf{I}_3) - \text{rk}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3)] = 3-1 = 2. \end{aligned}$$

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N(\mathbf{B}+8\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\mathbf{B}+8\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-7)E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-10)E_2(\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} d_1 &= \dim(E_{\mathbf{B}}(-8)) = \dim(N(\mathbf{B}+8\mathbf{I}_3) = \\ &= [(\text{numero di colonne di } \mathbf{B}+8\mathbf{I}_3) - \text{rk}(\mathbf{B}+8\mathbf{I}_3)] = 3-2 = 1. \end{aligned}$$

(b) Al Punto (a) abbiamo visto che la matrice $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ ha autovalori $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità geometriche $d_1 = 1$ e $d_2 = 2$.

$$E_{\mathbf{A}}(-8) = N(\mathbf{A}+8\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}+8\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 10 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(-8) = N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}h \\ \frac{1}{7}h \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(-8)$.

Al punto (a) abbiamo visto che

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big),$$

per cui

$$E_{\mathbf{A}}(2) = \Big\{ \begin{pmatrix} k \\ h \\ k \end{pmatrix} \Big| h, k \in \mathbb{C} \Big\} \quad \text{e} \quad \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\} \quad \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(2).$$

Al punto (a) abbiamo anche visto che la matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ ha autovalori $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità geometriche $d_1 = 1$ e $d_2 = 1$.

$$E_{\mathbf{B}}(2) = N(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} - 2\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(2)$.

Al punto (a) abbiamo visto che

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big),$$

per cui

$$E_{\mathbf{B}}(-8)=\left\{\begin{pmatrix}0\\h\\0\end{pmatrix}\Big| h\in\mathbb{C}\right\}\quad \text{e}\quad \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\quad \text{è una base di } E_{\mathbf{B}}(-8).$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha)=\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{2}+1 & \frac{\alpha}{2} & 0\\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha\in\mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha\in\mathbb{C}$ si ha che 3 è un autovalore di $\mathbf{A}(\alpha)$?

(b) Per quali $\alpha\in\mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ ha due autovaori uguali ? In questi casi dire se $\mathbf{A}(\alpha)$ è o non è diagonalizzabile.

(a) Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha)-x\mathbf{I}_3)=\\
&=\mathrm{Det}\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{2}+1-x & \frac{\alpha}{2} & 0\\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1-x & 0\\ 0 & 0 & \alpha-x\end{pmatrix}=\\
&=(-1)^{3+3}(\alpha-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{2}+1-x & \frac{\alpha}{2}\\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1-x\end{pmatrix}=\\
&=(\alpha-x)\left[\left(\frac{\alpha}{2}+1-x\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]=\\
&=(\alpha-x)\left(\frac{\alpha}{2}+1-x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2}+1-x+\frac{\alpha}{2}\right)=\\
&=(\alpha-x)(1-x)(\alpha+1-x).
\end{aligned}$$

Gi autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x)$, ossia le soluzioni dell'equazione:

$$(\alpha-x)(1-x)(\alpha+1-x)=0,$$

cioè 1, α ed $\alpha+1$.

Dunque

$$\begin{aligned}
3 \text{ è autovalore di } \mathbf{A}(\alpha) \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha=3 \quad \text{oppure} \quad \alpha+1=3\\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha=3 \quad \text{oppure} \quad \alpha=2.
\end{aligned}$$

(b) Dai conti svolti in (a), otteniamo che

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{ha due autovalori uguali} \quad &\iff \quad \alpha = 1 \quad \text{oppure} \quad \alpha + 1 = 1 \\ &\iff \quad \alpha = 1 \quad \text{oppure} \quad \alpha = 0.\end{aligned}$$

Studiamo i casi $\alpha = 1$ ed $\alpha = 0$. Abbiamo:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(1)$	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 1$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$

Dal momento che una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro, abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(1) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad &\iff \quad d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = m_1 = 2 \\ \mathbf{A}(0) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad &\iff \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1)) = m_2 = 2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 \quad &= \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = \dim(N(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3] - \text{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) = \\ &= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) \\ d_2 \quad &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1)) = \dim(N(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3] - \text{rk}(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3) = \\ &= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3)\end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(1)-\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{21}(-\frac{1}{2})E_1(2)}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

per cui $\mathrm{rk}(\mathbf{A}(1)-\mathbf{I}_3)=1$, e quindi

$$d_1=\dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1))=3-1=2.$$

In conclusione, $\mathbf{A}(1)$ è diagonalizzabile.

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0)-\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(0)-\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_1(-1)E_{13}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

per cui $\mathrm{rk}(\mathbf{A}(0)-\mathbf{I}_3)=1$, e quindi

$$d_2=\dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1))=3-1=2.$$

In conclusione, anche $\mathbf{A}(0)$ è diagonalizzabile.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Si dica se le matrici considerate negli esercizi 3 e 4 sono diagonalizzabili oppure no.

Le matrici considerate negli esercizi 3 e 4 sono:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-2i\\2i&0\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2&0&2i\\0&-8&0\\2i&0&-6\end{pmatrix},$$

ed abbiamo calcolato:

Ogni autovalore di $\mathbf{A}$ ha molteplicità algebrica e geometrica uguali ($\mathbf{A}$ ha autovalori distinti, per cui ogni suo autovalore ha molteplicità algebrica uguale ad 1 e conseguentemente, essendo

$$1\leq \text{ molteplicità geometrica } \leq \text{ molteplicità algebrica } (=1)$$

anche molteplicità geometrica uguale ad 1).

Dunque $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile.

La matrice $\mathbf{B}$ ha un autovalore (l'autovalore $\lambda_2=-4$) in cui la molteplicità algebrica ($m_2=2$) è diversa dalla molteplicità geometrica ($d_2=1$).

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
A	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$
B	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = -4$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$

Dunque **B** non è diagonalizzabile.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha)$ la matrice considerata nell'esercizio 6. Per quegli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

La matrice considerata nell'esercizio 6 è

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{C}$, ed abbiamo calcolato:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{-8, 2\}$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = \alpha$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 2$
$\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$

Solo per $\alpha = -8$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{A}(-8) = \mathbf{B}$ ha un autovalore ($\lambda_1 = -8$) con molteplicità algebrica ($m_1 = 2$) diversa dalla molteplicità geometrica ($d_1 = 1$).
Quindi

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è diagonalizzabile} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \neq -8.$$

Troviamo una diagonalizzazione per $\mathbf{A}(\alpha)$ per ogni $\alpha \neq -8$.

$\boxed{\text{caso} \quad \alpha \notin \{-\mathbf{8}, \mathbf{2}\}:}$

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8) = N(\mathbf{A}(\alpha) + 8\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) + 8\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & \alpha+8 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\alpha\neq-8: \quad E_2(\frac{1}{\alpha+8})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8) \quad = N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) =$$

$$= \Big\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}h \\ \frac{10}{7(\alpha+8)}h \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8)$.

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2) = N(\mathbf{A}(\alpha) - 2\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - 2\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{\alpha\neq 2: \quad E_2(\frac{1}{\alpha-2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2)$.

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha) = N(\mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1-\alpha & 0 & 3 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(1+\alpha)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha\neq 2: \quad E_{32}(-2+\alpha)E_2(\frac{1}{\alpha-2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha) \quad &= N\Big(\begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \\ &= \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\}, \end{aligned}$$

e quindi $\left\{ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha)$.

Dunque se $\alpha \notin \{-8, 2\}$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{S}(\alpha)\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{S}(\alpha)^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{caso} \quad \alpha = \mathbf{2}:}$ Posto $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$, nell'Esercizio 8 degli "Esercizi per casa 10" abbiamo visto che

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-8) \text{ e}$$

$$\left\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2).$$

Dunque se $\alpha = 2$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

N.B.: Per ogni $\alpha \neq -8$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\mathbf{A}(\alpha)=\mathbf{S}(\alpha)\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{S}(\alpha)^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}(\alpha)=\begin{pmatrix}-8&0&0\\0&2&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{S}(\alpha)=\begin{pmatrix}-\frac{3}{7}&1&0\\\frac{10}{7(\alpha+8)}&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha)=\begin{pmatrix}2&i\\i&\alpha\end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha\in\mathbb{C}$.

Per quali $\alpha\in\mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

Poichè $\mathbf{A}(\alpha)$ **è una matrice** 2×2 **non scalare**, allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ha i (due) autovalori distinti (perchè solo in tal caso ciascun suo autovalore ha molteplicità algebrica e geometrica uguali).

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha)-x\mathbf{I}_2)=\mathrm{Det}\begin{pmatrix}2-x&i\\i&\alpha-x\end{pmatrix}=\\
&=(2-x)(\alpha-x)-i^2=\\
&=2\alpha-\alpha x-2x+x^2+1=\\
&=x^2-(\alpha+2)x+(2\alpha+1).
\end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1=\frac{\alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1)}}{2}=\frac{\alpha+2+\sqrt{\alpha^2+4+4\alpha-8\alpha-4}}{2}=\frac{\alpha+2+\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2} \quad \text{e}$$

$$\lambda_2=\frac{\alpha+2-\sqrt{(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1)}}{2}=\frac{\alpha+2-\sqrt{\alpha^2+4+4\alpha-8\alpha-4}}{2}=\frac{\alpha+2-\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2}.$$

Quindi

$$\lambda_1\neq\lambda_2 \iff \sqrt{\alpha^2-4\alpha}\neq 0 \iff \alpha^2-4\alpha\neq 0 \iff \alpha\notin\{0,4\},$$

e concludiamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha\notin\{0,4\},$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) \quad &= \text{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \text{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha-x & 0 \\ 3i & 0 & \alpha-x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(\alpha-x)\text{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & 2+\alpha-x \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha-x)[(-2-x)(2+\alpha-x) - 4i^2] = \\ &= (\alpha-x)(-4-2x-2\alpha-\alpha x+2x+x^2+4) = \\ &= (\alpha-x)(x^2-\alpha x-2\alpha). \end{aligned}$$

Qundi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}.$$

Dal momento che

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda_2 \iff 2\alpha = \alpha + \sqrt{\alpha^2+8\alpha} \iff \alpha = \sqrt{\alpha^2+8\alpha} \iff \alpha = 0, \\ &\lambda_1 = \lambda_3 \iff 2\alpha = \alpha - \sqrt{\alpha^2+8\alpha} \iff \alpha = -\sqrt{\alpha^2+8\alpha} \iff \alpha = 0, \\ &\lambda_2 = \lambda_3 \iff \sqrt{\alpha^2+8\alpha} = 0 \iff \alpha \in \{0, -8\}, \end{aligned}$$

abbiamo:

Dunque:

- se $\alpha \notin \{0, -8\}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.

•• $\mathbf{A}(0)$ sarebbe diagonalizzabile solo se fosse $d_1 = \text{dim}(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_3 = 3$.

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0, -8\}$	$\lambda_1 = \alpha$ $\lambda_2 = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$ $\lambda_3 = \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = 0$	$m_1 = 3$	$1 \leq d_1 \leq 3$
$\mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = -4$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$

N.B.: Se fosse $\dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3$ sarebbe $E_{\mathbf{A}(0)}(0) = \mathbb{C}^3$, e quindi $\mathbf{A}(0) = \mathbf{O}$.

Dunque, essendo $\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$, $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

• • • $\mathbf{A}(-8)$ è diagonalizzabile $\iff$ $d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = m_2 = 2$

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = \dim(N(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3] - \text{rk}(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) = \\ &= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} + 4\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) = 2$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque $\mathbf{A}(-8)$ non è diagonalizzabile.

In conclusione abbiamo:

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \notin \{0, -8\}.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove α è **un numero reale non positivo**.

Per quali α numeri reali non positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & -3-x & 0 \\ -3i\alpha & 0 & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{2+2}(-3-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -3i \\ -3i\alpha & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-3-x)(x^2 - 9i^2\alpha) = \\ &= (-3-x)(x^2 + 9\alpha). \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono ($\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \leq 0$):

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \sqrt{-9\alpha} = 3\sqrt{-\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -\sqrt{-9\alpha} = -3\sqrt{-\alpha}.$$

Dal momento che α è un numero reale non positivo, allora

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \neq \lambda_2, \\ &\lambda_1 = \lambda_3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = -1, \\ &\lambda_2 = \lambda_3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = 0. \end{aligned}$$

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0,-1\}$	$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 3\sqrt{-\alpha}$ $\lambda_3 = -3\sqrt{-\alpha}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 0$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$
$\mathbf{A}(-1)$	$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 3$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$

Quindi se $\alpha \notin \{0,-1\}$ allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.
Anche $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è diagonalizzabile: abbiamo visto in (a) che è addirittura unitariamente diagonalizzabile (quindi è vero, e non occorre verificarlo, che $d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(-1)}(-3)) = m_1 = 2$).
Inoltre:

$$\mathbf{A}(0) \quad \text{è diagonalizzabile} \qquad \Longleftrightarrow \qquad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_2 = 2.$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = \dim(N(\mathbf{A}(0)) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0)] - \operatorname{rk}(\mathbf{A}(0)) = \\ &= 3 - \operatorname{rk}(\mathbf{A}(0)) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0)$:

$$\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3}i)E_1(-\frac{1}{3})E_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\operatorname{rk}(\mathbf{A}(0)) = 2$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.
In conclusione (essendo α reale non positivo):

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } \alpha < 0.$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$ (si veda l'esercizio $\boxed{10}$)

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?

(a) $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile $\iff$ $\mathbf{A}(\alpha)$ è normale $\iff$

$$\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{i} \\ \overline{i} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4+1 & -2i+i\overline{\alpha} \\ 2i-\alpha i & 1+\alpha\overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2i+i\overline{\alpha} \\ 2i-\alpha i & 1+|\alpha|^2 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4+1 & 2i-i\alpha \\ -2i+\overline{\alpha}i & 1+\overline{\alpha}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2i-i\alpha \\ -2i+\overline{\alpha}i & 1+|\alpha|^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$ otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \quad \iff \quad -2i+i\overline{\alpha} = 2i-i\alpha \quad \iff \quad \alpha+\overline{\alpha} = 4.$$

Scrivendo α in forma algebrica:

$$\alpha = a+ib \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R},$$

abbiamo che $\overline{\alpha} = a-ib$ per cui

$$\alpha+\overline{\alpha}=(a+ib)+(a-ib)=2a=4 \iff a=2 \iff \alpha=2+ib \text{ con } b\in\mathbb{R}.$$

In conclusione,

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile } \iff \alpha=2+ib \text{ con } b\in\mathbb{R}.$$

$\boxed{\mathbf{14}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha)=\begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\quad$ dove $\alpha\in\mathbb{R}$ (si veda l'esercizio $\boxed{11}$).

(a) Per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?

$$(a)\ \mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile } \iff \mathbf{A}(\alpha) \text{ è normale } \iff$$
$$\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H=\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$, tenendo conto del fatto che da $\alpha\in\mathbb{R}$ segue $\overline{\alpha}=\alpha$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H=\begin{pmatrix} \overline{-2} & \overline{2i} & \overline{0} \\ \overline{2i} & \overline{2+\alpha} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}= \\
&= \begin{pmatrix} 8 & 8i+2i\alpha & 0 \\ -8i-2i\alpha & 4+(2+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}= \\
&= \begin{pmatrix} 8 & -8i-2i\alpha & 0 \\ 8i+2i\alpha & 4+(2+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$ otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad 8i + 2i\alpha = -8i - 2i\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -4.$$

$\boxed{\mathbf{15}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dove α è **un numero reale non positivo** (si veda l'esercizio $\boxed{12}$).
(a) Per quali α numeri reali non positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?

(a) $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}(\alpha)$ è normale $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$, tenendo conto del fatto che da $\alpha \in \mathbb{R}$ segue $\overline{\alpha} = \alpha$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{-3i\alpha} \\ \overline{0} & \overline{-3} & \overline{0} \\ \overline{-3i} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9\alpha^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$, e tenendo conto che α **è non positivo**, otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -1.$$