

Svolgimento degli Esercizi per casa 12 (2^a parte)

13 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$ (si veda l'esercizio **10**)

- (a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile?
 (b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per \mathbf{A} .
 (c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si scriva \mathbf{A} nella forma $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2$, con λ_1 e λ_2 autovalori di \mathbf{A} , e \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 matrici di proiezione su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)$ ed $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)$ rispettivamente.
 (d) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Posto $z_1 = (2+i)^{300}$ e $z_2 = (2-i)^{300}$, si scriva \mathbf{A}^{300} in funzione di z_1 e z_2 .

$$\begin{aligned} (a) \mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} &\iff \mathbf{A}(\alpha) \text{ è normale} \iff \\ &\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha). \end{aligned}$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{i} \\ \bar{i} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4+1 & -2i+i\bar{\alpha} \\ 2i-\alpha i & 1+\alpha\bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2i+i\bar{\alpha} \\ 2i-\alpha i & 1+|\alpha|^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4+1 & 2i-i\alpha \\ -2i+\bar{\alpha}i & 1+\bar{\alpha}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2i-i\alpha \\ -2i+\bar{\alpha}i & 1+|\alpha|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$ otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \iff -2i + i\bar{\alpha} = 2i - i\alpha \iff \alpha + \bar{\alpha} = 4.$$

Scrivendo α in forma algebrica:

$$\alpha = a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},$$

abbiamo che $\bar{\alpha} = a - ib$ per cui

$$\alpha + \bar{\alpha} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 4 \iff a = 2 \iff \alpha = 2 + ib \quad \text{con } b \in \mathbb{R}.$$

In conclusione,

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile } \iff \alpha = 2 + ib \quad \text{con } b \in \mathbb{R}.$$

(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. Abbiamo visto in (a) che \mathbf{A} è unitariamente diagonalizzabile (perchè $2 = 2 + ib$ con $b = 0 \in \mathbb{R}$). I suoi autovalori (calcolati nell'Esercizio 4 degli Esercizi 8) sono:

$$\lambda_1 = \frac{2+2+\sqrt{4-8}}{2} = \frac{4+\sqrt{-4}}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2 + i \quad \text{e}$$

$$\lambda_2 = \frac{2+2-\sqrt{4-8}}{2} = \frac{4-\sqrt{-4}}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2 - i.$$

con molteplicità algebriche e geometriche uguali a

$$m_1 = d_1 = m_2 = d_2 = 1.$$

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di \mathbf{A} .

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2 + i) = N(\mathbf{A} - (2 + i)\mathbf{I}_2).$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} - (2 + i)\mathbf{I}_2$:

$$\mathbf{A} - (2 + i)\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-i)E_1(i)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{v}_1\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(2+i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(2+i)$, “normalizziamo” \mathbf{v}_1 .

$$\|\mathbf{v}_1\|_2 = \sqrt{\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_1} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i) = N(\mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I}_2).$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I}_2$:

$$\mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-i)E_1(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{v}_2\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(2-i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(2-i)$, “normalizziamo” \mathbf{v}_2 .

$$\|\mathbf{v}_2\|_2 = \sqrt{\mathbf{v}_2^H \mathbf{v}_2} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2 - i)$.

Dunque se $\alpha = 2$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ è:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con} \\ \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad \text{ed} \\ \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_2} & \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(c) Al punto (b) abbiamo visto:

gli autovalori di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ sono $\lambda_1 = 2 + i$ e $\lambda_2 = 2 - i$;

$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2 + i)$;

$\left\{ \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2 - i)$.

Posto $\mathbf{Q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione \mathbf{P}_1 su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2 + i)$ è

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_1^H = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_2} \cdot \frac{\mathbf{v}_1^H}{\|\mathbf{v}_1\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente, posto $\mathbf{Q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione \mathbf{P}_2 su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2 - i)$ è

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2^H = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|_2} \cdot \frac{\mathbf{v}_2^H}{\|\mathbf{v}_2\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

N.B.: Siccome \mathbf{A} ha due soli autovalori, allora $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_1$.

Dunque

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 = \frac{2+i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2-i}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Al punto (b) abbiamo visto che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ ha una diagonalizzazione unitaria

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{300} &= (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H)^{300} = \mathbf{U}\mathbf{D}^{300}\mathbf{U}^H = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2+i)^{300} & 0 \\ 0 & (2-i)^{300} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & z_1 - z_2 \\ z_1 - z_2 & z_1 + z_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

14 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ (si veda l'esercizio **11**).

- (a) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile?
 (b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -4$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per \mathbf{A} .
 (c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si scriva \mathbf{A} nella forma $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3$, con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ autovalori di \mathbf{A} , e $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ matrici di proiezione su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1), E_{\mathbf{A}}(\lambda_2), E_{\mathbf{A}}(\lambda_3)$ rispettivamente.

$$\begin{aligned} (a) \mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} &\iff \mathbf{A}(\alpha) \text{ è normale} \iff \\ &\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha). \end{aligned}$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$, tenendo conto del fatto che da $\alpha \in \mathbb{R}$ segue $\bar{\alpha} = \alpha$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \overline{-2} & \overline{2i} & \overline{0} \\ \overline{2i} & \overline{2+\alpha} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 8i+2i\alpha & 0 \\ -8i-2i\alpha & 4+(2+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -8i-2i\alpha & 0 \\ 8i+2i\alpha & 4+(2+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$ otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \iff 8i+2i\alpha = -8i-2i\alpha \iff \alpha = -4.$$

(b) Abbiamo visto in (a) che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ è unitariamente diagonalizzabile. I suoi autovalori (calcolati nell'esercizio 5 degli Esercizi 8) sono:

$$\lambda_1 = \alpha = -4$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2} = \frac{-4 + \sqrt{(-4)^2 + 8(-4)}}{2} = \frac{-4 + \sqrt{-16}}{2} = \frac{-4 + 4i}{2} = -2 + 2i,$$

$$\lambda_3 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2} = \frac{-4 - \sqrt{(-4)^2 + 8(-4)}}{2} = \frac{-4 - \sqrt{-16}}{2} = \frac{-4 - 4i}{2} = -2 - 2i,$$

ciascuno con molteplicità algebrica e geometrica uguali ad 1.

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di \mathbf{A} .

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4) = N(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w}_1\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-4)$. Inoltre, essendo $\|\mathbf{w}_1\|_2 = 1$, non occorre “normalizzare” \mathbf{w}_1 : $\{\mathbf{w}_1\}$ è già una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-4)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2 + 2i) = N(\mathbf{A} + (2 - 2i)\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} + (2 - 2i)\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A} + (2 - 2i)\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -2i & 2i & 0 \\ 2i & -2i & 0 \\ 0 & 0 & -2 - 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{-1+i}{4})E_{23}E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2}i)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2 + 2i) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2 + 2i)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w}_2\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-2 + 2i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-2 + 2i)$, “normalizziamo” \mathbf{w}_2 .

$$\|\mathbf{w}_2\|_2 = \sqrt{\mathbf{w}_2^H \mathbf{w}_2} = \sqrt{(1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2 + 2i)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2 - 2i) = N(\mathbf{A} + (2 + 2i)\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} + (2 + 2i)\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A} + (2 + 2i)\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2i & 2i & 0 \\ 2i & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2 + 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1+i}{4})E_{23}E_{21}(-2i)E_1(-\frac{1}{2}i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2 - 2i) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2 - 2i)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w}_3\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-2 - 2i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-2 - 2i)$, “normalizziamo” \mathbf{w}_3 .

$$\|\mathbf{w}_3\|_2 = \sqrt{\mathbf{w}_3^H \mathbf{w}_3} = \sqrt{(-1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2 - 2i)$.

Dunque se $\alpha = -4$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 + 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2 - 2i \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \left(\mathbf{w}_1 \quad \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} \quad \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Al punto (b) abbiamo visto:

gli autovalori di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ sono $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2 + 2i$ e

$\lambda_3 = -2 - 2i$;

$\left\{ \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4)$;

$\left\{ \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2 + 2i)$.

$\left\{ \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2 - 2i)$.

Posto $\mathbf{Q}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione \mathbf{P}_1 su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4)$ è

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^H = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} \cdot \frac{\mathbf{w}_1^H}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posto $\mathbf{Q}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione \mathbf{P}_2 su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2 + 2i)$ è

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^H = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} \cdot \frac{\mathbf{w}_2^H}{\|\mathbf{w}_2\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posto $\mathbf{Q}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione \mathbf{P}_3 su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2 - 2i)$ è

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_3^H = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} \cdot \frac{\mathbf{w}_3^H}{\|\mathbf{w}_3\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3 = \\ &= -4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{-2+2i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{-2-2i}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

15 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dove α è un numero reale non positivo (si veda l'esercizio **12**).

(a) Per quali α numeri reali non positivi si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile?

(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -1$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^H$ per \mathbf{A} .

$$\begin{aligned} (a) \mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} &\iff \mathbf{A}(\alpha) \text{ è normale} \iff \\ &\iff \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H \mathbf{A}(\alpha). \end{aligned}$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$, tenendo conto del fatto che da $\alpha \in \mathbb{R}$ segue $\bar{\alpha} = \alpha$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \overline{-3i\alpha} \\ \bar{0} & \overline{-3} & \bar{0} \\ \overline{-3i} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9\alpha^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$, e tenendo conto che α è **non positivo**, otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \iff \alpha^2 = 1 \iff \alpha = -1.$$

(b) Abbiamo visto in (a) che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è unitariamente diagonalizzabile. I suoi autovalori (calcolati nell'esercizio 6 degli esercizi 8) sono:

$$\lambda_1 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3$$

con molteplicità algebriche e geometriche uguali a

$$m_1 = 2 = d_1 \quad \text{e} \quad m_2 = 1 = d_2.$$

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di \mathbf{A} .

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3) = N(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} ik \\ h \\ k \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3)$.

N.B.: In questo caso non occorre applicare l'algoritmo di G.S. a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$: $\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, per cui

$\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-3)$

Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-3)$, “normalizziamo” \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .

$$\|\mathbf{v}_1\|_2 = \sqrt{\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_1} = \sqrt{(-i \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{v}_2\|_2 = \sqrt{\mathbf{v}_2^H \mathbf{v}_2} = \sqrt{(0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3) = N(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & -6 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{6})E_{31}(-3i)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi $\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w}_1\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(3)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(3)$, “normalizziamo” \mathbf{w}_1 .

$$\|\mathbf{w}_1\|_2 = \sqrt{\mathbf{w}_1^H \mathbf{w}_1} = \sqrt{(i \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3)$.

Dunque se $\alpha = -1$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_2} & \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|_2} & \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$