G. Parmeggiani **26/3/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Svolgimento degli Esercizi per casa 4 (1^a parte)

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}(\alpha)$ per $\mathbf{A}(\alpha)$ e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di $\mathbf{U}(\alpha)$.

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{a}(\alpha)$:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2i})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2+8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha)$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\alpha^2+4 \neq 0$ ossia $\alpha \neq 2i$ ed $\alpha \neq -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2+8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2\alpha^2-8)E_2(\frac{1}{\alpha^2+4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{C}(\alpha)$$

$\boxed{1^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\alpha \neq 2i, \quad \alpha \neq -2i, \quad \alpha \neq 0$

$$\mathbf{C}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 2^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 3^a.

$\boxed{2^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\alpha = 0$ $\quad \mathbf{C}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ $\mathbf{U}(0)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(0)$, le colonne dominanti sono la 1^a e la 2^a, quelle libere la 3^a e la 4^a.

$\boxed{2^o CASO}$ $\quad \alpha^2+4=0$ ossia $\alpha = 2i$ oppure $\alpha=-2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&-1&\alpha\\0&0&1&0\\0&0&2&2\alpha\end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix}1&0&-1&\alpha\\0&0&1&0\\0&0&0&2\alpha\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(1/2\alpha)\quad (\alpha\neq 0)} \begin{pmatrix}1&0&-1&\alpha\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 3^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 2^a.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}\ \mathbf{x}=\mathbf{b}$ nei seguenti casi:

$$(a)\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&-3&9&6\\1&-1&7&4\\1&-1&3&2\\-2&2&-6&-4\end{pmatrix} \quad \text{e } \mathbf{b}=\begin{pmatrix}6\\4\\2\\-4\end{pmatrix};$$

$$(b)\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&-3&9&6\\1&-1&7&4\\1&-1&3&2\\-2&2&-6&-4\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}6\\4\\3\\-4\end{pmatrix};$$

$$(c)\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&-3&9&6\\1&0&7&4\\1&-1&5&2\\1&0&5&6\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}6\\4\\4\\8\end{pmatrix}.$$

(a) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\left(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}3&-3&9&6&6\\1&-1&7&4&4\\1&-1&3&2&2\\-2&2&-6&-4&-4\end{array}\right) \xrightarrow{E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&2&2\\0&0&4&2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&2&2\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right) = \left(\mathbf{U} \mid \mathbf{d}\right).$$

Il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad\quad x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere, $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ (la 2^a e la 4^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = h - 3(-\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}) - 2k + 2 = h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & | & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & | & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ -2 & 2 & -6 & -4 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$.

Poichè $\mathbf{d}$ è dominante, allora $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ e quindi $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, non ha soluzioni.

(c) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & | & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 & | & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & | & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(2)E_3(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\,\mathbf{x} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad\qquad x_3 & = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_4 & = 3 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{U}\,\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.
Poichè $\mathbf{U}$ non ha colonne libere, $\mathbf{U}\,\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ha esattamente una soluzione.
Con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_4 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = -4x_3 - 2x_4 + 2 = -8 \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = -15 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione di $\mathbf{U}\,\mathbf{x} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, è il vettore $\begin{pmatrix} -15 \\ -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}(\alpha) & | & \mathbf{b}(\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & | & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}(\alpha) & | & \mathbf{c}(\alpha)\end{pmatrix}.$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = -i \qquad \begin{pmatrix}\mathbf{B}(-i) & | & \mathbf{c}(-i)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 & | & -2i \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

è una forma ridotta di Gauss per $\begin{pmatrix}\mathbf{A}(-i) & | & \mathbf{b}(-i)\end{pmatrix}$, quindi $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$ è equivalente a $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}$(-i) è libera, $\mathbf{B}$(-i) $\mathbf{x} = \mathbf{c}$(-i) ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}$(-i) ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}$(-i)$\mathbf{x} = \mathbf{c}$(-i) ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}$(-i) (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}$(-i)$\mathbf{x} = \mathbf{c}$(-i) (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}$(-i)$\mathbf{x} = \mathbf{b}$(-i)) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \neq -i$

$$\big(\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\big) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & \alpha+i & | & \alpha+i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\qquad}$$

$$\xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} = \big(\mathbf{C}(\alpha) | \quad \mathbf{d}(\alpha)\big).$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\quad \alpha = i \quad \big(\mathbf{C}(i) \quad | \quad \mathbf{d}(i)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $\big(\mathbf{A}(i) \quad | \quad \mathbf{b}(i)\big)$, quindi $\mathbf{A}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathrm{i})$ è equivalente a $\mathbf{C}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathrm{i})$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}(\mathrm{i})$ è libera, $\mathbf{C}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathrm{i})$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}(\mathrm{i})$ sono dominanti, $\mathbf{C}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathrm{i})$ ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di $\mathbf{C}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathrm{i})$ (e quindi di $\mathbf{A}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathrm{i})$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\quad \alpha \notin \{i, -i\}$

$$\big(\mathbf{C}(\alpha) | \quad \mathbf{d}(\alpha)\big) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-i})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = \big(\mathbf{D}(\alpha) | \quad \mathbf{e}(\alpha)\big)$$

è una forma ridotta di Gauss per $\left(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\right)$.

Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.