G. Parmeggiani **5/4/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Svolgimento degli Esercizi per casa 6

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$ e si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Proviamo prima che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{1^0 \text{ MODO}}$ (i) $\mathbf{O}_{2\times 2} \in W$: $\mathbf{O}_{2\times 2} \in M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbf{O}_{2\times 2}^T = \mathbf{O}_{2\times 2} = -\mathbf{O}_{2\times 2}$

(ii)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \\ \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B}^T = -\mathbf{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = -\mathbf{A} - \mathbf{B} = -(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$.

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A}\in W \Longrightarrow \mathbf{A}\in M_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A}\in M_2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{A}\in W \Longrightarrow \mathbf{A}^T=-\mathbf{A} \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T=\alpha\mathbf{A}^T=\alpha(-\mathbf{A})=-\alpha\mathbf{A} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \alpha\mathbf{A}\in W$$

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$ (i) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a = 0$.

(ii) Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c \in \mathbb{R} \,|\, \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix},$$

basta prendere $c = a + b$.

(iii) Se $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{A} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad b \in \mathbb{R} \,|\, \alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ -\alpha a & 0 \end{pmatrix},$$

basta prendere $b = \alpha a$.

Dunque W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

Vediamo ora quale tra $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ e $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è un insieme di generatori di W.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$: Dal momento che ogni elemento di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un elemento di W, per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è o non è un insieme di generatori di W, spazio vettoriale **reale**, occorre stabilire se **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esistono** α_1 ed α_2 numeri **reali** tali che

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, il problema diventa stabilire se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = a \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = -a \end{cases}$$

nelle incognite **reali** α_1, α_2 ha soluzione. $(*)$ è equivalente all'unica equazione

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = -a$$

che ha soluzioni per ogni $a \in \mathbb{R}$ (si prendano ad esempio $\alpha_2 = 0$ ed $\alpha_1 = -a$).

Dunque $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$: Poichè $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ non è un insieme di generatori per W.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$: Dal momento che $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in W$, per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è o non è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale **reale** occorre stabilire se **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste** $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ -3\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, il problema diventa stabilire se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema

$$(**) \qquad \begin{cases} 3\alpha = a \\ -3\alpha = -a \end{cases}$$

nell' incognita **reale** α ha soluzione. Poichè $(**)$ ha soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$ $(\alpha = a/3)$, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si dica se

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è o non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ occorre stabilire se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 == \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 \end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ -1 & -4 & 2 & b \\ 2 & 8 & -4 & c \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & -1 & 3 & a+b \\ 0 & 2 & -6 & c-2a \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & -3 & -a-b \\ 0 & 0 & 0 & 2b+c \end{array}\right).$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $2b + c \neq 0$ (si prendano ad esempio $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $(*)$ non ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, per cui $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Siano $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e_3} \in \mathbb{R}^3$. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ l'insieme di vettori $\boldsymbol{\mathcal{S}}\ (x) = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; x \cdot \mathbf{e_3}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}\ (x) = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; x \cdot \mathbf{e_3}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ se e solo se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \alpha_3 \mathbf{v_3} + \alpha_4 \cdot x \cdot \mathbf{e_3} = \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 4\alpha_3 + \alpha_4 x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ossia se e solo se il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = b \\ 4\alpha_3 + \alpha_4 x = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ha soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 2 & 6 & 3 & 0 & | & b \\ 0 & 0 & 4 & x & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 4 & x & | & c \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & x & | & c-4b+2a \end{pmatrix} = \big(\mathbf{B}(\boldsymbol{x}) \quad | \quad \mathbf{c}(\boldsymbol{x})\big)$$

Se $x \neq 0$

$$\big(\mathbf{B}(\boldsymbol{x}) \quad | \quad \mathbf{c}(\boldsymbol{x})\big) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{x})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{c-4b+8a}{x} \end{pmatrix} = \big(\mathbf{U}(\boldsymbol{x}) \quad | \quad \mathbf{d}(\boldsymbol{x})\big)$$

Poichè $\mathbf{d}(\boldsymbol{x})$ è libera **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}\ (x)$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Se $x = 0$

$$\big(\mathbf{B}(\mathbf{0}) \quad | \quad \mathbf{c}(\mathbf{0})\big) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & c-4b+8a \end{pmatrix} = \big(\mathbf{U}(\mathbf{0}) \quad | \quad \mathbf{d}(\mathbf{0})\big)$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{d}(\mathbf{0})$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}\ (0)$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Concludendo, $\boldsymbol{\mathcal{S}}\ (x)$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ se e solo se $x \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \right\}.$$

(1) Per stabilire se $\{\mathbf{v_1};\mathbf{v_2};\mathbf{v_3}\}$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\mathbf{v_1}+\alpha_2\mathbf{v_2}+\alpha_3\mathbf{v_3}=\mathbf{0}$ siano $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3\in\mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{v_1}+\alpha_2\mathbf{v_2}+\alpha_3\mathbf{v_3}=\alpha_1\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\alpha_2+2\alpha_3\\4\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3\\2\alpha_2+\alpha_3\end{pmatrix},$$

allora $\alpha_1\mathbf{v_1}+\alpha_2\mathbf{v_2}+\alpha_3\mathbf{v_3}=\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ se e solo se

$$(*)\qquad \begin{cases}4\alpha_2+2\alpha_3=0\\4\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3=0\\2\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

Il problema diventa quindi stabilire se il sistema $(*)$ (nelle incognite $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$) abbia un'unica soluzione (e quindi la soluzione nulla $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$), oppure no. La matrice aumentata di $(*)$ è: $\begin{pmatrix}0&4&2&|&0\\4&6&-1&|&0\\0&2&1&|&0\end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{pmatrix}0&4&2&|&0\\4&6&-1&|&0\\0&2&1&|&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}}\begin{pmatrix}1&3/2&-1/4&|&0\\0&4&2&|&0\\0&2&1&|&0\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})}\begin{pmatrix}1&3/2&-1/4&|&0\\0&1&1/2&|&0\\0&0&0&|&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{U}&|&\mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

Poichè **non tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(*)$ ha ∞ soluzioni. In particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, e quindi $\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}\}$ è **linearmente dipendente** (ad esempio, poichè $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases}\alpha_1+\frac{3}{2}\alpha_2-\frac{1}{4}\alpha_3=0\\ \alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3=0\end{cases}$$

prendendo $\alpha_3=1$ con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\alpha_2=-\frac{1}{2}\qquad\text{e}\qquad\alpha_1=-\frac{3}{2}\alpha_2-\frac{1}{4}\alpha_3=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1,$$

ossia $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di $(*)$ e $\mathbf{v_1} - \frac{1}{2}\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla di $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ con coefficienti non tutti nulli).

Abbreviando ...

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}.$$

Poichè **non tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è **linearmente dipendente** .

(2) Per stabilire se $\{\mathbf{w_1}; \mathbf{w_2}; \mathbf{w_3}\}$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \mathbf{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

allora $\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se

$$(**) \qquad \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(**)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\mathbf{U} \mid \mathbf{0}\right).$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(**)$ ha come unica soluzione la soluzione nulla $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, ossia

$$\alpha_1\mathbf{w_1}+\alpha_2\mathbf{w_2}+\alpha_3\mathbf{w_3}=\mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.$$

Quindi $\{\mathbf{w_1},\mathbf{w_2},\mathbf{w_3}\}$ è **linearmente indipendente**.

Abbreviando ...

Sia $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3\end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\4&0&-1\\0&2&1\end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \begin{pmatrix}1&0&-1/4\\0&1&1\\0&2&1\end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\to \begin{pmatrix}1&0&-1/4\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-1)} \begin{pmatrix}1&0&-1/4\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathbf{U}.$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $\{\mathbf{w_1},\mathbf{w_2},\mathbf{w_3}\}$ è **linearmente indipendente** .

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia W l'insieme delle matrici anti-simmetriche reali di ordine 2. W è uno spazio vettoriale reale, essendo un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ (si veda l'esercizio 1). Si considerino i suoi sottoinsiemi $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ e $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ definiti nell'esercizio 1. Per ciascuno di essi si dica se è linearmente indipendente oppure linearmente dipendente.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$: Per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1 ed α_2 per cui

$$\alpha_1\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

siano $\alpha_1=\alpha_2=0$, oppure no. Poichè, dati α_1, $\alpha_2\in\mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\alpha_1+2\alpha_2\\\alpha_1-2\alpha_2&0\end{pmatrix}$$

allora

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se

$$(*) \qquad \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Poichè $(*)$ è equivalente all'unica equazione

$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$

che ha una soluzione non nulla (si prenda ad esempio $\alpha_2 = 1$ e con la sostituzione all'indietro si ottiene $\alpha_1 = 2$, per cui $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di $(*)$ e

$$2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una combinazione lineare nulla degli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ con coefficienti non tutti nulli).

Quindi $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è **linearmente dipendente**.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$: $\quad$ **$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ non è un sottoinsieme di W.**

La domanda se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ sia o non sia linearmente indipendente ha senso non nello spazio vettoriale W, ma in tutto $M_2(\mathbb{R})$.

Per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente (in $M_2(\mathbb{R})$), occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1 ed α_2 per cui

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siano $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

Quindi $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ è **linearmente indipendente in** $M_2(\mathbb{R})$.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$: Essendo $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, l'unico $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si abbia

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

è $\alpha = 0$, per cui

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è **linearmente indipendente**.