G. Parmeggiani **10/5/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Svolgimento degli Esercizi per casa 9 (1^a parte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si dica quale delle due seguenti posizioni definisce un'applicazione lineare:

(a) $T_1 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $T_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$;

(b) $T_2 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $T_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$.

Fissato $i \in \{1, 2\}$, per vedere che $T_i : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ è un'applicazione lineare occorre verificare che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $T_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = T_i(\mathbf{A}) + T_i(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$;

(2) $T_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha T_i(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

• T_1 verifica la condizione (1) ?

Poichè la trasposta della somma di matrici è la somma delle trasposte si ha:

$$T_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = T_1(\mathbf{A}) + T_1(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dunque T_1 verifica la condizione (1).

T_1 verifica la condizione (2) ?

Poichè la trasposta del prodotto di una matrice per uno scalare è il prodotto della trasposta della matrice per lo scalare, si ha:

$$T_1(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha T_1(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque T_1 verifica la condizione (2).

Verificando entrambe le condizioni (1) e (2), T_1 è un'applicazione lineare.

• T_2 verifica la condizione (1) ?

Essendo

$$\begin{cases} T_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}^2 \\ T_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 \\ T_2(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 \end{cases}$$

se fosse $T_2(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = T_2(\mathbf{A}) + T_2(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A},\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$, sarebbe

$$(*) \quad \mathbf{BA}+\mathbf{AB} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$$

Ma $(*)$ è falsa: si prenda, ad esempio, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I_n}$.

Dunque T_2 non verifica la condizione (1) e quindi non è un'applicazione lineare.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $T : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ definita da $T(\mathbf{A}) = \mathbf{Ae_1}$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$.

(a) Si provi che T è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino il nucleo $\mathrm{Ker}(T)$ e l'immagine $\mathrm{Im}(T)$ di T.

(a) $M_2(\mathbb{C})$ e $\mathbb{C}^2$ sono entrambi spazi vettoriali complessi. Verificare che T è un'applicazione lineare significa verificare che sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $T(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = T(\mathbf{A}) + T(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A},\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

(2) $T(\alpha\mathbf{A}) = \alpha T(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(1): $T(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{e_1} = \mathbf{Ae_1} + \mathbf{Be_1} = T(\mathbf{A}) + T(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

Dunque T verifica la condizione (1).

(2): $T(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{e_1} = \alpha(\mathbf{Ae_1}) = \alpha T(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Dunque T verifica anche la condizione (2), per cui è un'applicazione lineare.

(b) Poichè $T(\mathbf{A}) = \mathbf{Ae_1}$ è la 1^a colonna di $\mathbf{A}$, allora

• $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}) | T(\mathbf{A}) = \mathbf{0}\}$ è l'insieme delle matrici complesse 2×2 con la prima colonna nulla, ossia

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

• $\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{A}) | \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})\}$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{C}^2$ che siano prime colonne di matrici complesse 2×2. Poichè per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ esiste $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ tale che $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sia la prima colonna di $\mathbf{A}$ (si prenda, ad esempio $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$), allora $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{C}^2$.