G. Parmeggiani **17/5/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Svolgimento degli Esercizi per casa 9 (2^a parte)

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definita da:

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(a) Si provi che T è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad T rispetto alle basi ordinate

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mathcal{D}} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

$(\bullet)$ Per provare che T è un'applicazione lineare occorre provare :

1. $T(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) = T(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + T(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) \quad \forall a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

2. $T(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \alpha T(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \quad \forall \alpha, a, b \in \mathbb{R}$

1. $$T(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) = T(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & a_2 + b_2 \\ a_2 - b_2 & b_2 \end{pmatrix} = T(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + T(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix})$$

2. $$T(\alpha\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) = T(\begin{pmatrix}\alpha a\\ \alpha b\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\alpha a & \alpha a+\alpha b\\ \alpha a-\alpha b & \alpha b\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha a & \alpha(a+b)\\ \alpha(a-b) & \alpha b\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}a & a+b\\ a-b & b\end{pmatrix} = \alpha T(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})$$

(••) La matrice $\mathbf{A}$ associata ad T rispetto alle basi ordinate $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(T(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})) & C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(T(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}))\end{pmatrix}.$$

Dalla definizione di T si ottiene:

$$T(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}, \qquad T(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix},$$

quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}) & C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix})\end{pmatrix}.$$

Calcoliamo le coordinate rispetto alla base ordinata $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ di un generico elemento $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\\ \gamma\end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} =$$

$$= \alpha\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2\gamma & \alpha+\beta\\ \beta+\delta & \beta\end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2\gamma &= a\\ \alpha+\beta &= b\\ \beta+\delta &= c\\ \beta &= d\end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} \beta &= d\\ \gamma &= a/2\\ \alpha = b-\beta = b-d\\ \delta = c-\beta = c-d\end{cases}$,

quindi

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}b-d\\ d\\ c-d\\ a/2\end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, otteniamo

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ associata ad T rispetto alle basi ordinate $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ su dominio e codominio rispettivamente è quindi la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Siano

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \Big| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mathcal{D}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

W è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ (N.B.: non se ne richiede la verifica).

(a) Si provi che $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ è una base di W.

(b) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to W$ definita da

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ a+b \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad T rispetto alle basi ordinate

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ sul dominio e } \boldsymbol{\mathcal{D}} \text{ sul codominio}$$

rispettivamente (N.B.: non si richiede di verificare che T è un'applicazione lineare).

(a) Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ è una base di W occorre provare che $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ è un insieme di generatori di W e che $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ è L.I.

• Per verificare che $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ è un insieme di generatori di W occorre verificare che per ogni $\mathbf{w} \in W$ esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{w} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per definizione di W, se $\mathbf{w} \in W$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix}$, per cui per verificare che $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ è un insieme di generatori di W occorre verificare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix}.$$

Esistono: basta prendere $\alpha = a$ e $\beta = b$.

- Da $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix}$ segue che

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \alpha = \beta = 0, \text{ per cui } \boldsymbol{\mathcal{D}} \text{ è L.I.}$$

(b) La matrice $\mathbf{A}$ associata ad T rispetto alle basi ordinate $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})) & C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})) & C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(T(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})) \end{pmatrix}.$$

Dalla definizione di T si ottiene:

$$T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) & C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) & C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo le coordinate rispetto a $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ di un generico elemento $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \in W$.

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix}$$

Quindi

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, otteniamo

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ associata ad T rispetto alle basi ordinate $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ su dominio e codominio rispettivamente è quindi la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$