G. Parmeggiani **21/5/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Esercizi per casa 11

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sapendo che la posizione $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i.$$

definisce un prodotto scalare, si consideri la norma $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ da esso indotta. Si trovino tutte le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sapendo che la posizione $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 + 2\overline{x}_2 y_2$$

definisce un prodotto scalare, siano $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norma da esso indotta ed $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$. Si trovino tutti i vettori $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tali che $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{C}^4$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si consideri il sottospazio

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $M_2(\mathbb{C})$. Si trovi una base ortonormale di W rispetto al prodotto scalare $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definito nell'esercizio $\boxed{1}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Siano

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si trovino basi di $V_1^\perp$ e $V_2^\perp$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ come nell'esercizio $\boxed{4}$. Si trovi il complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $M_2(\mathbb{C})$ rispetto al prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ sul sottospazio

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ come nell'esercizio $\boxed{4}$. Si calcoli la proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ di

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

su W rispetto al prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Sia

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Si calcoli la matrice di proiezione su W.

(b) Si calcoli la matrice di proiezione sul complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbb{C}^3$.