G. Parmeggiani **28/5/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Esercizi per casa 12

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare (sugg.: si calcoli il determinante $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$. Si calcolino:

– gli autovalori di $\mathbf{A}$,
– le loro molteplicità algebriche e
– le loro molteplicità geometriche.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Si calcolino:

– gli autovalori di $\mathbf{A}$,
– le loro molteplicità algebriche e
– le loro molteplicità geometriche.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si trovino basi degli autospazi delle matrici considerate negli esercizi 3 e 4 .

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si calcolino gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Siano $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ le matrici che si ottengono ponendo $\alpha = 2$ ed $\alpha = -8$ rispettivamente. Si trovino basi degli autospazi di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}+1 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che 3 è un autovalore di $\mathbf{A}(\alpha)$?

(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ ha due autovaori uguali ? In questi casi dire se $\mathbf{A}(\alpha)$ è o non è diagonalizzabile.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Si dica se le matrici considerate negli esercizi 3 e 4 degli sono diagonalizzabili oppure no.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha)$ la matrice considerata nell'esercizio 6 degli ". Per quegli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.
Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$\boxed{\mathbf{11}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$\boxed{\mathbf{12}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove α è **un numero reale non positivo**.

Per quali α numeri reali non positivi si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$\boxed{\mathbf{13}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$ (si veda l'esercizio $\boxed{10}$)

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per $\mathbf{A}$.
(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si scriva $\mathbf{A}$ nella forma $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2$, con λ_1 e λ_2 autovalori di $\mathbf{A}$, e $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ matrici di proiezione su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)$ ed $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)$ rispettivamente.
(d) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Posto $z_1 = (2+i)^{300}$ e $z_2 = (2-i)^{300}$, si scriva $\mathbf{A}^{300}$ in funzione di z_1 e z_2.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ (si veda l'esercizio $\boxed{11}$)

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -4$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per $\mathbf{A}$.
(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -4$. Si scriva $\mathbf{A}$ nella forma $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \lambda_3\mathbf{P}_3$, con λ_1, λ_2, λ_3 autovalori di $\mathbf{A}$, e $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ matrici di proiezione su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)$, $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)$, $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3)$ rispettivamente.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dove α è **un numero reale non positivo**. (si veda l'esercizio $\boxed{12}$).

(a) Per quali α numeri reali noon positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -1$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per $\mathbf{A}$.