G. Parmeggiani **16/4/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Esercizi per casa 7

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sia $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore od uguale a 2. Si provi che $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{2+x^2; x-x^2; 1+x\}$ è una base di V.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \,\Big|\, a, b, c \in \mathbb{C} \right\}.$$

V è un sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$ (non ne è richiesta la verifica); in particolare V è uno spazio vettoriale. Si provi che

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di V.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia W lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 reali simmetriche. L'insieme

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{ \quad \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C_5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \}$$

è un suo insieme di generatori (non ne è richiesta la verifica). Si trovi una base di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Qual è la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche ?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\quad \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha - 1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha - 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ e si trovi una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha}$ di $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$.