G. Parmeggiani **7/5/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Esercizi per casa 9

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si dica quale delle due seguenti posizioni definisce un'applicazione lineare:

(a) $T_1 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $T_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$;

(b) $T_2 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $T_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $T : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ definita da $T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1}$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$.

(a) Si provi che T è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino il nucleo $\mathrm{Ker}(T)$ e l'immagine $\mathrm{Im}(T)$ di T.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definita da:

$$T\Big(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Big) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(a) Si provi che T è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad T rispetto alle basi ordinate

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mathcal{D}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Siano

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \Big| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mathcal{D}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

W è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ (N.B.: non se ne richiede la verifica).

(a) Si provi che $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ è una base di W.

(b) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to W$ definita da

$$T\Big(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Big) = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ a+b \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad T rispetto alle basi ordinate

$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sul dominio e $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ sul codominio

rispettivamente (N.B.: non si richiede di verificare che T è un'applicazione lineare).