G. Parmeggiani **17/5/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

ESERCIZIO TIPO 13

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad T rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$$

dove $\mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}'$, e $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Siccome nell'ESERCIZIO TIPO 12 abbiamo calcolato $\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'}$ (le basi $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ di questo esercizio sono le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ dell'ESERCIZIO TIPO 12), ci conviene, piuttosto che calcolare $\mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}}$, calcolare $(\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'})^{-1}$ ed usare il fatto che $\mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}} = (\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'})^{-1}$ per cui:

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$$

Nell'ESERCIZIO TIPO 12 abbiamo calcolato $\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcoliamo la sua inversa:

$$\left(\mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} \quad | \quad \mathbf{I_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{3}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\mathbf{I_3} \quad | \quad (\boldsymbol{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'})^{-1}\right)$$

Dunque

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}'\leftarrow\mathcal{D}} = (\boldsymbol{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \left(C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right)\right).$$

Calcoliamo $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, e specializziamo la formula ottenuta ai due diversi vettori $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 2\beta \\ 6\alpha - 4\beta \end{pmatrix}$$

risolvendo il sistema lineare $\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = a \\ 6\alpha - 4\beta = b \end{cases}$ (nelle incognite α e β)si ottiene

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2a+b}{10} \\ \frac{3a-b}{10} \end{pmatrix}.$$

Ponendo $a = 6$ e $b = 8$ otteniamo $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; ponendo $a = 2$ e $b = -4$ otteniamo $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \left(C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -36 & 19 \\ 2 & 2 \\ 24 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -53 & 19 \\ 6 & 2 \\ 37 & -11 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$