G. Parmeggiani **23/5/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

ESERCIZIO TIPO 15

Si consideri il sottospazio $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

(a) Si trovi il complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbb{C}^3$.

(b) Si calcoli la proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ su W.

Posto $\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$, $\mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

una matrice tale che $C(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{w_1}; \mathbf{w_2}; \mathbf{w_3} \rangle = W$.

(a) Da $W = C(\mathbf{A})$ segue $W^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$. Facendo una EG su

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ i & 0 & 1 \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

si ottiene:

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ i & 1 & 1 \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(i)E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}) \iff \begin{cases} x_1 - ix_3 & = 0 \\ \qquad x_2 & = 0 \end{cases}$$

allora

$$N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Troviamo una base ortonormale di W. Facendo una EG su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè le colonne dominanti di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$ sono la 1^a e la 3^a, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1 = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_3}\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = W$. Posto

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_2 = \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

applichiamo l'algoritmo di GS a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ per trovare una base ortogonale $\{\mathbf{u_1}; \mathbf{u_2}\}$ di W.

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2i$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = 2i/2 = i$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = $$
$$= \mathbf{v}_2 - i\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_2 = \left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortogonale di W.

Troviamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di W, normalizzando gli elementi di $\mathcal{B}_2$. Essendo

$$\|\mathbf{u_1}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{u_2}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u_1}^* = \frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{u_2}^* = \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di W.

La proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ su W è

$$\begin{aligned}
P_W(\mathbf{v}) &= (\mathbf{u_1}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_1}^* + (\mathbf{u_2}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_2}^* = \\
&= (\mathbf{u_1}^*)^H \mathbf{v} \cdot \mathbf{u_1}^* + (\mathbf{u_2}^*)^H \mathbf{v} \cdot \mathbf{u_2}^* = \\
&= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \tfrac{1}{2}(5i - i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= 2i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$