

G. Parmeggiani, 28/5/2019 ,

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: Informatica

Studenti: numero di MATRICOLA PARI

ESERCIZIO TIPO 16

Sia $\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} z & \bar{z} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dove $z \in \mathbb{C}$.

Si dica per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(z)$ è non singolare.

$\mathbf{A}(z)$ è non singolare se e solo se $\text{Det}(\mathbf{A}(z)) \neq 0$. Calcoliamo dunque $\text{Det}(\mathbf{A}(z))$.

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathbf{A}(z)) & \stackrel{\text{sviluppato rispetto alla 2}^{\text{a}} \text{ riga}}{=} (-1)^{2+3} \text{Det} \begin{pmatrix} z & \bar{z} & 0 \\ 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ & \stackrel{\text{sviluppato rispetto alla 3}^{\text{a}} \text{ colonna}}{=} -(z-i)(-1)^{2+3} \text{Det} \begin{pmatrix} z & \bar{z} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = (z-i)(z-\bar{z}) \end{aligned}$$

Quindi $\mathbf{A}(z)$ è non singolare se e solo se $(z-i)(z-\bar{z}) \neq 0$.

Si osservi che $(z-i)(z-\bar{z}) = 0$ se e solo se o $z-i = 0$, e quindi $z = i$, oppure $z-\bar{z} = 0$, e quindi $z = \bar{z}$. Poichè

$$z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R},$$

allora

$$\text{Det}(\mathbf{A}(z)) = 0 \iff z \in \mathbb{R} \cup \{i\}$$

e quindi

$$\text{Det}(\mathbf{A}(z)) \neq 0 \iff z \notin \mathbb{R} \cup \{i\}.$$

Concludendo

$$\mathbf{A}(z) \text{ è non singolare} \iff z \notin \mathbb{R} \cup \{i\}.$$