G. Parmeggiani **29/5/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

ESERCIZIO TIPO 18

Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha-1 \end{pmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si trovino:

– gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$,
– le loro molteplicità algebriche,
– le loro molteplicità geometriche,
– basi degli autospazi di $\mathbf{A}(\alpha)$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è una triangolare, per cui i suoi autovalori sono i suoi elementi diagonali

$$\lambda_1 = \alpha \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \alpha - 1$$

con molteplicità algebriche

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

(Infatti, il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è: $p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) = (\alpha - x)(\alpha - 1 - x)^2$.)

Siano d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2. Da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad d_2 \leq 2.$$

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha) = N(\mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\boxed{\text{caso } \alpha = 0:} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)E_{21}(1)E_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\boxed{\text{caso } \alpha \neq 0:}$ $\quad \alpha \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)E_1(\frac{1}{\alpha})E_{13}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha+1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

segue che

$$\boxed{\text{caso } \alpha = 0:} \quad d_1 = 1 \text{ e } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1)$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha \neq 0:} \quad d_1 = 1 \text{ e } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1).$$

N.B.: $\underline{\text{Per ogni } \alpha \in \mathbb{R} \text{ si ha che}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\} \underline{\text{ è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_1).}$

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha - 1) = N(\mathbf{A}(\alpha) - (\alpha-1)\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - (\alpha-1)\mathbf{I}_3 \quad :$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}E_{31}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha = -1:} \quad E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big)$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha \neq -1:} \quad E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big).$$

Concludiamo che

$$\boxed{\text{caso } \alpha = -1:} \quad d_2 = 2 \text{ e } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2)$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha \neq -1:} \quad d_2 = 1 \text{ e } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2).$$