G. Parmeggiani **30/5/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

ESERCIZIO TIPO 19

Sia

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha-1 \end{pmatrix}, \text{ dove } \alpha \in \mathbb{R},$$

la matrice considerata nell'Esercizio Tipo 18.

(a) Si dica per quale/quali $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.

(b) Per quel/quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

(c) Per quel/quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{123}$.

(a) Nell'Esercizio Tipo 18 abbiamo calcolato:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \neq -1$	$\lambda_1 = \alpha$ $\lambda_2 = \alpha - 1$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$
$\mathbf{A}(-1)$	$\lambda_1 = \alpha = -1$ $\lambda_2 = \alpha - 1 = -2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 2$

Dal momento che una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro, e

$$d_1 = 1 = m_1 \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$m_2 = 2 \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

allora:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad &\iff \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2)) = 2\\ &\iff \quad \alpha = -1.\end{aligned}$$

(b) Posto $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$, nell'Esercizio Tipo 18 abbiamo visto che

$$\left\{\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-1) \text{ e}$$

$$\left\{\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2).$$

Dunque se $\alpha = -1$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Posto $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$, da (b) otteniamo che

$$\mathbf{A}^{123} = (\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1})^{123} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{123}\mathbf{S}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}^{123} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{123} = \begin{pmatrix} (-1)^{123} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{123} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{123} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ 0 & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo l'inversa di $\mathbf{S}$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{S} & | & \mathbf{I_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_1(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{I_3} & | & \mathbf{S}^{-1}\end{pmatrix}$$

Dunque

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{N.B.: } \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}).$$

Concludendo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{123} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ 0 & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ -1 & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ 1 - 2^{123} & 0 & -2^{123} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$