

**ESERCIZIO TIPO 7**

$$\text{Siano } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si dica se  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{C}^3$  è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

**Facendo tutti i passaggi, dalla definizione si ottiene ...**

Siano  $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$  tali che

$$(*) \quad \mathbf{0} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \delta \mathbf{v}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta + \delta \\ 3\alpha + 4\beta + 2\delta \end{pmatrix}.$$

$$\text{Allora } (*) \text{ equivale a (1) } \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + 2\delta = 0 \end{cases}.$$

(1) è un sistema lineare nelle incognite  $\alpha, \beta, \delta$ .

(1) ha sempre la soluzione nulla  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  (ossia  $\alpha = \beta = \delta = 0$ ).

Se essa dovesse essere l'unica soluzione di (1) (quindi se (1) avesse un'unica soluzione) allora  $\mathcal{S}$  sarebbe L.I., altrimenti, se (1) ha anche una soluzione non nulla (quindi se (1) ha più di una soluzione) allora  $\mathcal{S}$  è L.D.

Vediamo allora quante soluzioni ha (1). Facendo una eliminazione di Gauss sulla sua matrice aumentata si ottiene

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-3)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{32}(2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} | \mathbf{0})$$

L'ultima colonna di  $(\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$ , ossia  $\mathbf{0}$ , è libera, per cui (1) ha, come avevamo già osservato, soluzioni.

Poichè tutte le colonne di  $\mathbf{U}$  sono dominanti, il sistema (1) ha un'unica soluzione, quindi  $\mathcal{S}$  è L.I.

$$\left[ \text{Volendo risolvere (1), si ha che (1) è equivalente ad (1')} \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \right]$$

$$\text{e con la sostituzione all'indietro si ottiene } \begin{cases} \delta = 0 \\ \beta = -\delta = 0 \\ \alpha = -2\beta - \delta = 0 \end{cases} \quad \left. \right]$$

**Possiamo abbreviare il procedimento**

**(ATTENZIONE: solo perchè  $\mathcal{S}$  è un insieme di vettori colonna !)**

**nel seguente modo:**

Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ . Facendo una EG su  $\mathbf{A}$  si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè tutte le colonne di  $\mathbf{U}$  sono dominanti,  $\mathcal{S}$  è L.I.

**Questo perchè, siccome  $\mathcal{S}$  è un insieme di vettori colonna, la matrice  $\mathbf{A}$  dei coefficienti del sistema (1) è proprio la matrice**

$$\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3)$$

**le cui colonne sono gli elementi di  $\mathcal{S}$ .**