G. Parmeggiani **16/4/2019**

Algebra e matematica discreta, a.a. 2018/2019, parte di **Algebra**

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

ESERCIZIO TIPO 8

Sia
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \Big| \, a, b, c \in \mathbb{C} \right\}.$$

W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$ (non ne è richiesta la verifica); in particolare W è uno spazio vettoriale. L'insieme

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \quad \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \right.$$
$$\left. \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W (non ne è richiesta la verifica). Si trovi una base di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

"Restringiamo"un insieme di generatori di W.

1^0 **passaggio**. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$?

$\mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{C_4} = \mathbf{O} = 0\mathbf{C_1} + 0\mathbf{C_2} + 0\mathbf{C_3} + 0\mathbf{C_5} + 0\mathbf{C_6},$$

per cui togliamo subito $\mathbf{C_4}$ (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ che siano nulli**), **e poniamo**

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \left\{ \quad \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \right.$$
$$\left. \mathbf{C_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2^0 **passaggio**. $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$?

Poichè

$$\mathbf{C_1} = -\frac{1}{2}\mathbf{C_6} = 0\mathbf{C_2} + 0\mathbf{C_3} + 0\mathbf{C_5} - \frac{1}{2}\mathbf{C_6}$$

ma anche

$$\mathbf{C_6} = -2\mathbf{C_1} = -2\mathbf{C_1} + 0\mathbf{C_2} + 0\mathbf{C_3} + 0\mathbf{C_5}$$

possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{C_1}$, oppure possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{C_6}$, ottenendo ancora un insieme di generatori di W. Dunque, **guardiamo se tra i vettori di $\mathcal{S}_1$ ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno dei due vettori**. In questo caso abbiamo individuato la coppia $\mathbf{C_1}, \mathbf{C_6}$ e scegliamo di togliere $\mathbf{C_6}$.

Poniamo

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_2$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C_1} + \alpha_2\mathbf{C_2} + \alpha_3\mathbf{C_3} + \alpha_4\mathbf{C_5} = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_2$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 & 3\alpha_2 + 6\alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3})E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h \\ -2h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (si ponga $h = 1$), si ottiene

$$\mathbf{C_1} - 2\mathbf{C_2} + \mathbf{C_3} = \mathbf{O},$$

per cui $\mathbf{C_1}$,$\mathbf{C_2}$ e $\mathbf{C_3}$ sono combinazioni lineari degli altri elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da eliminare da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$.

N.B.: invece $\mathbf{C_5}$, non essendo combinazione lineare degli altri elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$, non puó essere eliminato da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$.

Scegliamo di togliere da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ la matrice $\mathbf{C_3}$ (combinazione lineare degli altri elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$) e poniamo

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3 = \left\{ \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4^0 **passaggio**. $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C_1} + \alpha_2\mathbf{C_2} + \alpha_3\mathbf{C_5} = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & 3\alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Si può vedere direttamente oppure facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3})E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

che l'unica soluzione del sistema è quella nulla. Dunque $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è linearmente indipendente, ed è una base di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.