S.PARMEGGIANI 22/5/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

Siano V uno spazio metrico su K

$(\cdot|\cdot)$ il prodotto scalare di V

$\|\cdot\|$ la norma indotta da $(\cdot|\cdot)$.

Def Un INSIEME di vettori $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_k\}$ si dice ORTONORMALE se

$\boxed{1}$ è ortogonale

$\boxed{2}$ tutti i suoi vettori hanno norma uguale ad 1

cioè $\iff \begin{cases} (\underline{w}_i|\underline{w}_j)=0 & \forall i\neq j \\ \|\underline{w}_i\|=1 & \forall i \end{cases}$

Poiché $\|\underline{w}_i\| = \sqrt{(\underline{w}_i|\underline{w}_i)}$ e $(\underline{w}_i|\underline{w}_i) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\Big\}$ allora $\|\underline{w}_i\|=1 \iff (\underline{w}_i|\underline{w}_i)=1$

quindi

$\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_k\}$ è ortonormale $\iff \begin{cases} (\underline{w}_i|\underline{w}_j)=0 & \forall i\neq j \\ (\underline{w}_i|\underline{w}_i)=1 & \forall i \end{cases}$

ESEMPIO $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ insieme delle colonne di I_n è un insieme di vettori ortonormale

- nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$ ed anche
- nello spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$.

Entrambi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono spazi metrici. Se non si specifica rispetto a quale prodotto scalare ci si sta riferendo SI SOTTINTENDE CHE CI SI STIA RIFERENDO AL PRODOTTO SCALARE CANONICO

Per verificare che $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ è ortonormale occorre verificare che

$$\begin{cases} (\underline{e}_i | \underline{e}_j) = 0 & \forall i \neq j \\ (\underline{e}_i | \underline{e}_i) = 1 & \forall i \end{cases}$$

$$(\underline{e}_i | \underline{e}_j) \underset{\uparrow}{=} \underline{e}_i^H \underline{e}_j = \begin{array}{c} \\ \end{array} \begin{array}{cccccccc} & & & & i & & & \\ [0 & \cdots & 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0] \end{array} \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = *$$

def prodotto scalare canonico

se $i \neq j$ $\quad (*) = 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 + \underbrace{1 \cdot 0}_{\text{addendo } i\text{-esimo}} + 0 \cdot 0 + \dots + \underbrace{0 \cdot 1}_{\text{addendo } j\text{-esimo}} + \dots + 0 \cdot 0 =$

$= 0 + 0 + \dots + 0 = 0$

se $i = j$ $\quad (*) = 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 + \underbrace{1 \cdot 1}_{\text{addendo } i\text{-esimo}} + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 =$

$= 0 + \dots 0 + 1 + 0 + \dots + 0 = 1$

Def Un **INSIEME DI GENERATORI ORTOGONALE** è un insieme di vettori che è
1. un insieme di generatori
2. un insieme di vettori ortogonale

Def Un **INSIEME DI GENERATORI ORTONORMALE** è un insieme di vettori che è
1. un insieme di generatori
2. un insieme di vettori ortonormale

Def Una **BASE ORTOGONALE** è un insieme di vettori che è
1. una base
2. un insieme di vettori ortogonale

Def Una **BASE ORTONORMALE** è un insieme di vettori che è
1. una base
2. un insieme di vettori ortonormale

ESEMPIO La base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ e di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare canonico)

PROPOSIZIONE: UN INSIEME DI VETTORI ORTOGONALE CHE SIA PRIVO DI VETTORI NULLI È L.I.

In particolare: UN INSIEME DI GENERATORI ORTOGONALE CHE SIA PRIVO DI VETTORI NULLI È UNA BASE ORTOGONALE

$\boxed{NB1}$ $\underline{0} \perp \underline{v}$ $\forall \underline{v} \in V$

$\boxed{NB2}$ Se S_0 è un insieme di generatori ORTOGONALE di V, allora l'insieme $\mathcal{B}$ che si ottiene da S_0 togliendo gli eventuali vettori nulli è una BASE ORTOGONALE di V.

Infatti:

$\mathcal{B}$ è ancora un insieme di generatori di V
(se $S_0 = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ e $\underline{u}_1 = \underline{0}$, allora $\underline{u}_1 = 0 \cdot \underline{u}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{u}_n$
$\Rightarrow$ $\underline{u}_1 = \underline{0}$ è combinazione lineare dei rimanenti vettori di S_0
$\Rightarrow$ $\{\underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} = \left(\text{insieme che si ottiene da } S_0 \text{ togliendo } \underline{u}_1 = \underline{0}\right)$ è ancora un insieme di generatori)

LEZIONE16

$\mathcal{B}$ è ancora ortogonale ($\mathcal{B}$ è un sottoinsieme di S_0 ed S_0 è ortogonale)

Dunque:
$\mathcal{B}$ insieme di generatori
$\mathcal{B}$ ortogonale
$\mathcal{B}$ privo di vettori uguali a $\underline{0}$
$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ L.I. (PROPOSIZIONE SOPRA)
$\mathcal{B}$ insieme di gen.
$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ base

$\mathcal{B}$ si ottiene da S_0 togliendo tutti i vettori uguali a $\underline{0}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ base ortogonale

OBIETTIVO: Dato $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ un insieme di generatori di V, costruire $S_0 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\}$ un insieme di generatori ORTOGONALE di V

TECNICA: L'ALGORITMO DI GRAM SCHMIDT (G.S.)

$\boxed{NB3}$ Se $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è una BASE di V, applicando ad S l'algoritmo G.S. si ottiene una BASE ortogonale di V.

$\boxed{NB4}$ Per costruire una base ORTONORMALE di V, normalizzo tutti i vettori di una base ortogonale di V.

ALGORITMO DI GRAM SCHMIDT (G.S.)

Ho $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$

costruisco $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n$

$$\underline{u}_1 = \underline{v}_1$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1$$

$$\alpha_{12} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{u}_1 = \underline{0} \\ \dfrac{(\underline{u}_1|\underline{v}_2)}{(\underline{u}_1|\underline{u}_1)} & \text{se } \underline{u}_1 \neq \underline{0} \end{cases}$$

$$\underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \alpha_{13}\underline{u}_1 - \alpha_{23}\underline{u}_2$$

$$\alpha_{13} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{u}_1 = \underline{0} \\ \dfrac{(\underline{u}_1|\underline{v}_3)}{(\underline{u}_1|\underline{u}_1)} & \text{se } \underline{u}_1 \neq \underline{0} \end{cases} \qquad \alpha_{23} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{u}_2 = \underline{0} \\ \dfrac{(\underline{u}_2|\underline{v}_3)}{(\underline{u}_2,\underline{u}_2)} & \text{se } \underline{u}_2 \neq \underline{0} \end{cases}$$

$$\underline{u}_4 = \underline{v}_4 - \alpha_{14}\underline{u}_1 - \alpha_{24}\underline{u}_2 - \alpha_{34}\underline{u}_3$$

$$\alpha_{14} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{u}_1 = \underline{0} \\ \dfrac{(\underline{u}_1|\underline{v}_4)}{(\underline{u}_1|\underline{u}_1)} & \text{se } \underline{u}_1 \neq \underline{0} \end{cases} \qquad \alpha_{24} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{u}_2 = \underline{0} \\ \dfrac{(\underline{u}_2|\underline{v}_4)}{(\underline{u}_2|\underline{u}_2)} & \text{se } \underline{u}_2 \neq \underline{0} \end{cases} \qquad \alpha_{34} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{u}_3 = \underline{0} \\ \dfrac{(\underline{u}_3|\underline{v}_4)}{(\underline{u}_3|\underline{u}_3)} & \text{se } \underline{u}_3 \neq \underline{0} \end{cases}$$

.....

se $j \in \{2, \dots, n\}$

$$\underline{u}_j = \underline{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ij} \underline{u}_i$$

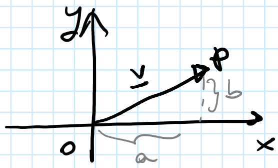
$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{u}_i = \underline{0} \\ \dfrac{(\underline{u}_i | \underline{v}_j)}{(\underline{u}_i | \underline{u}_i)} & \text{se } \underline{u}_i \neq \underline{0} \end{cases}$$

ESERCIZIO TIPO 14 (file: I19Tipo14.pdf)

PER CASA: ESERCIZI 3 e 4 (file: I19casaT11.pdf)

PARENTESI $\quad V = \mathbb{R}^2$

$\underline{0} \neq \underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \underline{v} \longleftrightarrow \overrightarrow{OP}$ dove $P(a,b)$

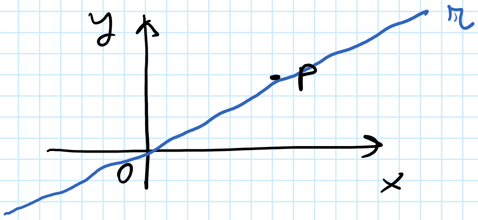


$\underline{v} \neq \underline{0} \Rightarrow P \neq O$

$\langle \underline{v} \rangle = \{ \alpha \underline{v} \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

Poiché $\alpha \underline{v} = \alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$ è rappresentato in Oxy

dal punto $Q(\alpha a, \alpha b)$ sulla retta r per O e per P



e, viceversa, ogni punto sulla retta r ha coordinate

$(\beta a, \beta b)$ per un opportuno $\beta \in \mathbb{R}$, allora

$\langle \underline{v} \rangle$ è rappresentato in Oxy dalla retta per O e per P
dove P è il punto che rappresenta $\underline{v}$

<u>NB</u> I sottospazi U di $\mathbb{R}^2$ con $\dim U = 1$
sono del tipo $U = \langle \underline{v} \rangle$ con $\underline{v} \neq \underline{0}$

Quindi (1) ogni vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ è rappresentato in Oxy da un punto

(2) ogni sottospazio di dimensione 1 di $\mathbb{R}^2$ è rappresentato in Oxy da una retta passante per O