UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

SCUOLA DI SCIENZE

Tutti i Corsi di Laurea in SCIENZE STATISTICHE

Metodi Matematici - Algebra Lineare, a.a. 2014/2015

Programma svolto nella prima settimana:
28/10/14 Presentazione del corso. Il modello preda-predatore linearizzato.
Dal libro: Da pag. 185 a pag. 191.

Programma svolto nella seconda settimana:
9/10/13 Proprietà del polinomio caratteristico. Traccia e determinante come somma e prodotto degli autovalori. Esempi.
Dal libro: Da pag. 194 a pag. 200.

11/10/13 Matrici simili. Molteplicità algebrica $\geq$ molteplicità geometrica. Esercizi.
Dal libro: Da pag. 200 a pag. 201.

Esercizio per casa: Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si calcolino gli autovalori di $\mathbf{A}_\alpha$ e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(b) Siano $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2$ e $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{-8}$ le matrici che si ottengono ponendo $\alpha = 2$ ed $\alpha = -8$ rispettivamente. Si trovino basi degli autospazi di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$.

Programma svolto nella terza settimana:

10/11/14 Traccia e determinante come somma e prodotto degli autovalori. Matrici simili. Autovalori e loro molteplicità algebriche di matrici simili.
Dal libro: Da pag. 199 a pag. 200.
Esercizio per casa: Sia $\mathbf{A}_\delta$ una matrice quadrata con polinomio caratteristico uguale a

$$p_{\mathbf{A}_\delta}(x) = x^5 - 2x^3 + x + \delta - 3.$$

(a) Per quali $\delta \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A}_\delta$ è invertibile ?
(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}_3$ la matrice che si ottiene ponendo $\delta = 3$. Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}$ è invertibile ?

11/11/14 Molteplicità geometriche degli autovalori di matrici simili. Molteplicità algebrica $\geq$ molteplicità geometrica. Indipendenza di autospazi distinti. Caratterizzazione delle matrici diagonalizzabili.
Dal libro: Da pag. 201 a pag. 204.

Esercizio per casa: Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}+1 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che 3 è autovalore di $\mathbf{A}_\alpha$?
(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}_\alpha$ ha due autovalori uguali ? In questi casi dire se $\mathbf{A}_\alpha$ è o non è diagonalizzabile.

Programma svolto nella quarta settimana:

17/11/14 Esercizi.

Esercizio per casa: Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si calcolino gli autovalori di $\mathbf{A}_\alpha$ e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}_\alpha$ è diagonalizzabile ?
(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}_3$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 3$. Si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}$.

18/11/14 Caratterizzazione delle matrici di rango 1 diagonalizzabili. Esercizi.

Esercizi per casa:
[1] Sia $\mathbf{A}$ la matrice del punto (c) dell'esercizio per casa assegnato ieri. Si calcoli $\mathbf{A}^{100}$.
[2] Siano $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & | & \mathbf{B} \\ -- & | & -- \\ \mathbf{B} & | & \mathbf{B} \end{pmatrix}$.
Si provi che $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile e si trovi una sua diagonalizzazione (sugg.: si osservi che $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = 1$).

Programma svolto nella quinta settimana:

24/11/14 Triangolarizzazione unitaria: teorema di Schur.
Dal libro: Da pag. 204 a pag. 207.

25/11/14 Esercizi.

Esercizio per casa: Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovi una triangolarizzazione unitaria per $\mathbf{A}$.
(b) Si calcolino gli autovalori di $\mathbf{A}^{320}$.

Programma svolto nella sesta settimana:

1/12/14 Teorema spettrale: versione moltiplicativa. Esercizi.
Dal libro: Da pag. 220 a pag. 221.
Esercizio per casa: Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & i \\ i & 3 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A}_\alpha$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A}_\alpha$ è diagonalizzabile ?

(c) Per quegli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}_\alpha$ non è diagonalizzabile si trovi una triangolarizzazione unitaria per $\mathbf{A}_\alpha$.
(d) Si trovi una diagonalizzazione unitaria per $\mathbf{A}_3$.
(e) Si trovi una diagonalizzazione per $\mathbf{A}_2$.

2/12/14 Teorema spettrale: versione additiva. Esercizi.
Dal libro: Da pag. 221 a pag. 222.
Esercizio per casa: Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} -3 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$.
(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A}_\alpha$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Si trovi una diagonalizzazione unitaria per $\mathbf{A}_5$.
(c) Usando il teorema spettrale si scriva $\mathbf{A}_5$ nella forma $\mathbf{A}_5 = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2$, con λ_1, λ_2 autovalori di $\mathbf{A}_5$ e $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ matrici di proiezione.
(d) Si trovi una matrice $\mathbf{B}$ tale che $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$.