ALGEBRA LINEARE I (A) PER SCIENZE STATISTICHE, SGI E SPS, A.A. 2007/08, GEMMA PARMEGGIANI

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
via Trieste, 63
35131 Padova

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

PROGRAMMA SVOLTO

Il testo di riferimento è: Algebra Lineare, E. Gregorio, S. Salce, ed. Libreria Progetto Padova

26/11/07 Matrici. Esempi. Tipi particolari di matrici. Prodotto di una matrice per uno scalare. Somma di due matrici. Proprietà della somma e del prodotto per uno scalare. Prodotto di un vettore riga per un vettore colonna.

Dal libro: Da pag. 1 a pag. 7.

Esercizi per casa: Esercizio 1 delle Esercitazioni *1.

27/11/07 Prodotto righe per colonne di matrici. Esempi. Proprietà del prodotto righe per colonne. Premoltiplicazione e postmoltiplicazione per matrici diagonali. Il prodotto righe per colonne non è commutativo. Potenze di matrici quadrate. Trasposta, coniugata ed H-trasposta di una matrice.

Dal libro: Da pag. 7 a pag. 14.

Esercizi per casa: Esercizi 2, 3, 4, 5 delle Esercitazioni *1.

28/11/07 Matrici simmetriche, anti-simmetriche, hermitiane, anti-hermitiane e loro proprietà. Parte hermitiana ed anti-hermitiana di una matrice quadrata. Esercizi teorici.

Dal libro: Da pag. 14 a pag. 16.

Esercizi per casa: Esercizi 6, 7 e 8 delle Esercitazioni *1.

3/12/07 Sottomatrici. Decomposizione a blocchi e operazioni a blocchi. Casi particolari di decomposizioni a blocchi. Scrittura matriciale di un sistema lineare.

Dal libro: Da pag. 17 a pag. 21.

Esercizi per casa: Esercizio 9 delle Esercitazioni *1.

4/12/07 Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema. Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Eliminazione di Gauss (EG). Forma ridotta di Gauss di una matrice, colonne dominanti, colonne libere. Esempi.

Dal libro: Da pag. 21 a pag. 22. Nota 1 sulle operazioni elementari (file sulla pag. web),

Esercizi per casa: Esercizi 1 e 2 delle Esercitazioni *2.

5/12/07 Risoluzione di sistemi lineari. Esempi di sistemi lineari senza soluzioni, con un'unica soluzione, con infinite soluzioni. Esercizi Tipo 1 e 2.

Dal libro: Da pag. 23 a pag. 30.

Esercizi per casa: Esercizi 3 e 4 delle Esercitazioni *2.

10/12/07 Rango di una matrice. Inverse destre, sinistre bilatere. Esempi. Inverse di matrici 2×2.

Criterio per l'esistenza di una inversa destra e sua costruzione.

Dal libro: Da pag. 30 a pag. 36. Nota 2: osservazioni sul rango di una matrice (file sulla pag. web).

Esercizi per casa: Esercizi 1 e 2 delle Esercitazioni *3.

11/12/07 Esercizio Tipo 3. Come costruire l'inversa sinistra di una matrice la cui trasposta abbia un'inversa destra (esempio numerico: esercizio Tipo 3 bis). Criterio per l'esistenza di una inversa sinistra. Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo dell'inversa. Esercizio Tipo 4.

Dal libro: Da pag. 41 a pag. 46.

Esercizi per casa: Esercizi 3, 4 e 5 delle Esercitazioni *3.

12/12/07 Spazi vettoriali. Esempi. Sottospazi vettoriali. Esempi ed esercizi.

Dal libro: Da pag. 63 a metà pag. 70.

Esercizi per casa: Esercizi 6, 7 e 8 delle Esercitazioni *3.

17/12/07 Lo spazio nullo di una matrice. Insiemi di vettori. Sottoinsiemi ed unioni di insiemi di vettori. Combinazioni lineari. Sottospazi generati da insiemi di vettori. Insiemi di generatori. Esempi di insiemi di generatori. Prima parte dell'Esercizio Tipo 5.

Dal libro: Da pag. 71 a metà pag. 73.

Esercizi per casa: Esercizi 1, 2 e 3 delle Esercitazioni *4.

18/12/07 Seconda parte dell'Esercizio Tipo 5. Insiemi di vettori linearmente dipendenti e insiemi di vettori linearmente indipendenti. Esercizio Tipo 6.

Dal libro: Da pag. 73 a pag. 76.

Esercizi per casa: Esercizi 4 e 5 delle Esercitazioni *4.

19/12/07 Basi. Esempi di basi. Caratterizzazione delle basi come insiemi di generatori minimali. Ogni spazio vettoriale finitamente generato ha una base. Come estrarre una base da un insieme di generatori. Esercizio Tipo 7.

Dal libro: Da pag. 77 a pag. 83 e Teorema 3.13 e 3.14 pag. 86.

Esercizi per casa: Esercizi 6 e 7 delle Esercitazioni *4.

7/1/08 Caratterizzazioni delle basi come insiemi linearmente indipendenti massimali. Teorema 3.7 (Teorema di Steinitz). Teorema 3.10 (equipotenza delle basi di uno spazio vettoriale finitamente generato). Dimensione di uno spazio vettoriale. Enunciato Prop. 3.17. Definizione di somma e di somma diretta di sottospazi. Applicazioni lineari. Esempi. Applicazione lineare indotta da una matrice.

Dal libro: Da pag. 83 a pag. 91.

Esercizi per casa: Esercizio 8 delle Esercitazioni *4 ed esercizio 1 delle Esercitazioni *5.

8/1/08 Spazio nullo e immagine di un'applicazione lineare. Il caso di un' applicazione lineare indotta da una matrice. Teorema nullità+rango. Dimensione dello spazio delle colonne e dimensione dello spazio nullo di una matrice. Esercizio Tipo 8.

Dal libro: Da pag. 92 a pag. 103.

Esercizi per casa: Esercizi 2, 3 e 4 delle Esercitazioni *5.

9/1/08 Basi dello spazio delle colonne e dello spazio delle righe di una matrice. Esercizi Tipo 9 e 10. Proprietà del rango. Basi ordinate. Coordinate di un vettore rispetto ad una base ordinata.

Dal libro: Teorema 5.10 a pag. 102. Da pag. 105 a pag. 106.

Esercizi per casa: Esercizio 5 delle Esercitazioni *5.

14/1/08 Applicazine delle coordinate. Matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto a fissate basi su dominio e codominio. Matrice di passaggio da una base ordinata ad un'altra. Esercizi Tipo 11 e 12.

Dal libro: Da pag. 106 a pag. 110.

Esercizi per casa: Esercizi 6 e 7 delle Esercitazioni *5.

15/1/08 Come cambia la matrice associata ad una applicazione lineare rispetto a fissate basi su dominio e codominio cambiando le basi sul dominio e sul codominio. Interpretazione geometrica di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$. Regola del parallelogramma. Esercizio Tipo 13.

Dal libro: Da pag. 111 a pag. 113. Appendice C: da pag. 287 a pag. 292. Da pag. 119 a pag. 124.

Esercizi per casa: Esercizio 1 delle Esercitazioni *6.

16/1/08 Norme di vettori. Le norme $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$. Il coseno dell'angolo tra due vettori di $\mathbb{R}^2$. Prodotti interni. Il prodotto interno standard. La norma indotta da un prodotto interno. Il coseno dell'angolo tra due vettori di uno spazio vettoriale euclideo.

Dal libro: Da pag. 125 a pag. 128 e da pag. 130 a pag. 133.

Esercizi per casa: Esercizi 2, 3 e 4 delle Esercitazioni *6.

21/1/08 La diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (enunciato). Il coseno dell'angolo tra due vettori di uno spazio vettoriale euclideo. Vettori ortogonali in uno spazio euclideo. Insiemi ortogonali e basi ortogonali. Basi ortonormali. L'algoritmo di Gram-Schmidt. Esercizio Tipo 14.

Dal libro: Da pag. 140 a pag. 150.

Esercizi per casa: Esercizio 5 delle Esercitazioni *6.

22/1/08 La proiezione ortogonale di un vettore di uno spazio euclideo su di un sottospazio, ed il suo calcolo. Il complemento ortogonale di un sottospazio di uno spazio euclideo. Nota 3: calcolo di determinanti e proprietà dei determinanti (file sulla pag. web). Esercizi Tipo 15 e 16.

Dal libro: Da pag. 133 a pag. 135.

Esercizi per casa: Esercizio 6 delle Esercitazioni *7 ed esercizi 1 e 2 delle Esercitazioni *7.

NOTE

Nota 1: Operazioni elementari sulle righe di una matrice

Sia A una matrice $m \times n$. Si chiamano **operazioni elementari sulle righe di A** le tre seguenti operazioni:

- sommare ad una riga un'altra riga di $\mathbf{A}$ moltiplicata per uno scalare,
- moltiplicare una riga di $\mathbf{A}$ per uno scalare non nullo,
- scambiare due righe di $\mathbf{A}$.

Notazioni

• Sia $\mathbf{B}$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sommando alla i-esima riga di $\mathbf{A}$ la j-esima riga di $\mathbf{A}$ moltiplicata per lo scalare c, ossia sia $\mathbf{B}= [b_{kr}]$ la matrice con tutte le righe diverse dalla i-esima uguali alle corrispondenti righe di $\mathbf{A}= [a_{kr}]$, e con i-esima riga il vettore riga

$$\begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} + ca_{j1} & a_{i2} + ca_{j2} & \dots & a_{in} + ca_{jn} \end{pmatrix}.$$

Per indicare che $\mathbf{B}$ è la matrice ottenuta dalla matrice $\mathbf{A}$ eseguendo l'operazione elementare "sommare alla i-esima riga la j-esima riga moltiplicata per lo scalare c", scriviamo:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{E_{ij}(c)} \mathbf{B}.$$

• Sia $\mathbf{B}$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ moltiplicando la i-esima riga di $\mathbf{A}$ per lo scalare c ($c \neq 0$), ossia sia $\mathbf{B}= [b_{kr}]$ la matrice con tutte le righe diverse dalla i-esima uguali alle corrispondenti righe di $\mathbf{A}= [a_{kr}]$, ed con i-esima riga il vettore riga

$$\begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{in} \end{pmatrix}.$$

Per indicare che $\mathbf{B}$ è la matrice ottenuta dalla matrice $\mathbf{A}$ eseguendo l'operazione elementare "moltiplicare la i-esima riga per lo scalare (non nullo) c", scriviamo:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{E_i(c)} \mathbf{B}.$$

• Sia B la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ scambiando la i-esima riga di $\mathbf{A}$ con la j-esima, ossia sia $\mathbf{B}= [b_{kr}]$ la matrice con tutte le righe diverse dalla i-esima e dalla j-esima uguali alle corrispondenti righe di $\mathbf{A}$, e con i-esima e j-esima riga rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{j1} & b_{j2} & \dots & b_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

Per indicare che $\mathbf{B}$ è la matrice ottenuta dalla matrice $\mathbf{A}$ eseguendo l'operazione elementare "scambiare la i-esima riga con la j-esima riga", scriviamo:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{E_{ij}} \mathbf{B}.$$

N.B. I simboli $E_{ij}(c), E_i(c)$ e E_{ij} rappresentano in realtà opportune matrici, dette matrici elementari. Abbiamo scelto, con abuso di notazione, di indicare le operazioni elementari sulle righe di una matrice con gli stessi simboli con cui vengono indicate le matrici elementari poichè, come si vedrà in un corso superiore, vi è tra esse una stretta connessione.

Nota 2: Osservazioni sul rango di una matrice

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$. Se $\mathbf{U}_1$ ed $\mathbf{U}_2$ sono due forme ridotte di Gauss per $\mathbf{A}$, allora il numero delle righe non nulle di $\mathbf{U}_1$ è uguale al numero delle righe non nulle di $\mathbf{U}_2$. Ció dipende dal fatto che l'esistenza di diverse forme ridotte di Gauss per una matrice dipende esclusivamente dalla eventuale possibilità di fare delle scelte negli scambi di righe in una EG su $\mathbf{A}$, e gli scambi di righe non decrescono il numero delle righe non nulle.

Il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di Gauss di $\mathbf{A}$ dipende quindi esclusivamente da $\mathbf{A}$ (e non dalle operazioni elementari che si fanno in una EG su $\mathbf{A}$) e si chiama **il rango di A** (piú avanti nel corso daremo un'altra definizione di rango di una matrice, equivalente a questa). Si indica con il simbolo rk($\mathbf{A}$).

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$ di rango k ed $\mathbf{U}$ una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$. Poichè ogni "scalino" di $\mathbf{U}$ è "alto" una riga, allora

$$k = \text{numero delle righe non nulle di } \mathbf{U} = \text{numero delle colonne dominanti di } \mathbf{U}.$$

$\boxed{3}$ Se $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$ di rango k allora

$$k \leq m \quad \text{e} \quad k \leq n.$$

Infatti se $\mathbf{U}$ è ua forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$ allora $\mathbf{U}$ è $m \times n$ e

$$\begin{aligned} k &= \text{numero delle righe non nulle di } \mathbf{U} \leq \text{numero delle righe di } \mathbf{U} = m \\ k &= \text{numero delle colonne dominanti di } \mathbf{U} \leq \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} = n \end{aligned}$$

Nota 3: Calcolo di determinanti

Sia **A** una matrice **quadrata** di ordine n.

Il **determinante di A** è un numero che dipende da **A**. Esso si indica con il simbolo det(**A**), oppure Det(**A**). Impariamo a calcolarlo, cominciando con i casi $n = 1, 2, 3$.

Il caso n=1. Se $\mathbf{A} = (\, a_{11} \,)$, è $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = a_{11}$.

Il caso n=2. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, è $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Esempio 1. Il determinante di $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ è $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = 2 \times 5 - 3 \times 4 = 10 - 12 = -2$.

Abbiamo detto che $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} &= a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\,(\, a_{22} \,) = \\ &= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})}\mathrm{Det}\,(\, a_{22} \,) = \\ &= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})} \begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che} \\ \text{si ottiene da A sopprimendo} \\ \text{la } 1^a \text{ riga e la } 1^a \text{colonna di A} \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})} \begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che si ottiene da A} \\ \text{sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -a_{12}a_{21} &= a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\,(\, a_{21} \,) = \\ &= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})}\mathrm{Det}\,(\, a_{21} \,) = \\ &= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})} \begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che} \\ \text{si ottiene da } \mathbf{A} \text{ sopprimendo} \\ \text{la } 1^a \text{ riga e la } 2^a \text{colonna di } \mathbf{A} \end{pmatrix} = \\ &= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})} \begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che si ottiene da } \mathbf{A} \\ \text{sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Indicando con i simboli

$\mathbf{C}_{11}$ la matrice che si ottiene da **A** sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna,
$\mathbf{C}_{12}$ la matrice che si ottiene da **A** sopprimendo la 1^a riga e la 2^a colonna,

ed inoltre

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11}, \\ \mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12}, \end{aligned}$$

abbiamo:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12}.$$

Si tenga a mente che a_{11} ed a_{12} sono gli elementi della 1^a riga di $\mathbf{A}$.

Quindi se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, quello che abbiamo fatto per calcolare $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$ è stato:

(1) mettere in evidenza gli elementi della 1^a riga di $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

(2) per ciascuna posizione $(1, j)$ della 1^a riga di $\mathbf{A}$ (posto $(1,1)$ e posto $(1,2)$)

– costruire la matrice $\mathbf{C}_{1j}$ (ottenuta sopprimendo da A la 1^a riga e la $j-$esima colonna di $\mathbf{A}$),
– calcolare $\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$,
– calcolare $(-1)^{1+j}$,
– calcolare $\mathbf{A}_{1j} = (-1)^{1+j}\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$,

(3) calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{12} \end{pmatrix}$.

Il caso n=3. Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Per calcolare $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$ procediamo come abbiamo fatto nel caso $n = 2$.

(1) Mettiamo in evidenza gli elementi della 1^a riga di $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

(2) per ciascuna posizione $(1, j)$ della 1^a riga di $\mathbf{A}$ (posto $(1,1)$, posto $(1,2)$ e posto $(1,3)$)

– costruiamo la matrice C_{1j} (ottenuta sopprimendo da A la 1^a riga e la $j-$esima colonna di A):

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

– calcoliamo $\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$, usando il caso $n = 2$, ossia il caso precedente a quello che stiamo analizzando ora (che è $n = 3$):

$$\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31},$$

$$\mathrm{Det}\mathbf{C}_{13} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$

– calcoliamo $(-1)^{1+j}$: $(-1)^{1+1} = 1, (-1)^{1+2} = -1, (-1)^{1+3} = 1$,

– calcoliamo $\mathbf{A}_{1j} = (-1)^{1+j}\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11} &= (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},\\
\mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}),\\
\mathbf{A}_{13} &= (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

(3) Il determinante di $\mathbf{A}$ è il prodotto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}\\ \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{13}\end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + a_{13}\mathbf{A}_{13} =\\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{13}
\end{aligned}$$

Esempio 2. Calcoliamo il determinante della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 2 & 6 & 3\end{pmatrix}$.

In questo caso abbiamo

$$a_{11} = 3, \qquad a_{12} = -2, \qquad a_{13} = 1,$$

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 4\\ 6 & 3\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & 6\end{pmatrix},$$

per cui

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}A &= 3(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 4\\ 6 & 3\end{pmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix} + 1(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & 6\end{pmatrix} =\\
&= 3(3-24) + (-2)(-1)(0-8) + (0-2) = 3(-21) - 16 - 2 =\\
&= -81.
\end{aligned}$$

Quello che abbiamo fatto è quindi:

(a) per le matrici 1×1 porre $\mathrm{Det}(\, a_{11}\,) = a_{11}$,

(b) dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici 2×2 sapendo come calcolare il determinante delle matrici 1×1, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso $n = 2$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n = 1$ (si veda il punto (a)),

(c) dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici 3×3 sapendo come calcolare il determinante delle matrici 2×2, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso $n = 3$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n = 2$ (si veda il punto (b)).

Procediamo quindi allo stesso modo, dando una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici $n \times n$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici $(n-1) \times (n-1)$, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso n sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n-1$.

Sia dunque $\mathbf{A} = (\, a_{ij} \,)$ una matrice $n \times n$. Cominciamo con il dare la seguente definizione:

Def. 1. Per ogni $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$ si chiama **matrice complementare dell'elemento** a_{ij} od anche **matrice complementare di posto (i,j) in A**, e si indica con il simbolo $\mathbf{C}_{ij}$, la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sopprimendo la i-esima riga e la j-esima colonna. Dunque $\mathbf{C}_{ij}$ è una matrice $(n-1) \times (n-1)$.

Esempio 3. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 7 & -3 & 8 \\ 1+i & 2 & 5 & -5 & 17 \\ -1 & 6i & 0 & 5i & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i & 14i \end{pmatrix}$, allora

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3 & \boxed{4} & 11 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{7} & \boxed{-3} & \boxed{8} \\ 1+i & 2 & 5 & \boxed{-5} & 17 \\ -1 & 6i & 0 & \boxed{5i} & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & \boxed{4-6i} & 14i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{e la } 4^a \text{ colonna}]{\text{togliendo la } 2^a \text{ riga}} \mathbf{C}_{24} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 11 \\ 1+i & 2 & 5 & 17 \\ -1 & 6i & 0 & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & 14i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 & \boxed{11} \\ 0 & 2 & 7 & -3 & \boxed{8} \\ 1+i & 2 & 5 & -5 & \boxed{17} \\ \boxed{-1} & \boxed{6i} & \boxed{0} & \boxed{5i} & \boxed{1-4i} \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i & \boxed{14i} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{e la } 5^a \text{ colonna}]{\text{togliendo la } 3^a \text{ riga}} \mathbf{C}_{35} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 1+i & 2 & 5 & -5 \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i \end{pmatrix}$$

Def. 2. Per ogni $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$ si chiama **cofattore di posto (i,j) di A**, e si indica con il simbolo $\mathbf{A}_{ij}$, il numero

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \mathrm{Det}\,(\mathbf{C}_{ij}),$$

dove $\mathbf{C}_{ij}$ è la matrice complementare di posto (i,j) in $\mathbf{A}$.

Si ha:

Formula del determinante di una matrice sviluppato rispetto alla 1^ariga

se $\mathbf{A} = (\, a_{ij} \,)$ è una matrice $n \times n$ allora

$$\mathrm{Det}\mathbf{A} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + \ldots + a_{1,n-1}\mathbf{A}_{1,n-1} + a_{1n}\mathbf{A}_{1n}$$

dove $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\ldots$, $\mathbf{A}_{1,n-1}$, $\mathbf{A}_{1n}$ sono i cofattori di $\mathbf{A}$ di posti $(1,1)$, $(1,2)$, $\ldots$, $(1,n-1)$, $(1,n)$ (ossia i posti della 1^a riga) rispettivamente.

Esempio 4. Calcoliamo il determinante della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Usando la formula dello sviluppo del determinante rispetto alla 1^a riga di $\mathbf{A}$ abbiamo:

$$\text{Det}\mathbf{A} = 1 \times \mathbf{A}_{11} + (-5) \times \mathbf{A}_{12} + 0 \times \mathbf{A}_{13} + 3 \times \mathbf{A}_{14} = \mathbf{A}_{11} - 5\mathbf{A}_{12} + 3\mathbf{A}_{14}.$$

Dobbiamo quindi calcolare $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}$ ed $\mathbf{A}_{14}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11} &= (-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= 2(-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= 2(0-10) + 4(0-0) = -20, \\
\mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -\text{Det}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -(6(-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3}\text{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}) = \\
&= -(6(0-10) + 4(-10-0)) = -(-60-40) = 100, \\
\mathbf{A}_{14} &= (-1)^{1+4}\text{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= -\text{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= -(6(-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+3}\text{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}) = \\
&= -(6(0-0) - 2(-10-0)) = 2(-10) = -20.
\end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$\text{Det}\mathbf{A} = \mathbf{A}_{11} - 5\mathbf{A}_{12} + 3\mathbf{A}_{14} = -20 - 5 \times 100 + 3(-20) = -580.$$

Si puó dimostrare il seguente

Teorema. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Allora, fissato $i \in \{1, \dots, n\}$ si ha che

$$a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + \dots + a_{i,n-1}\mathbf{A}_{i,n-1} + a_{in}\mathbf{A}_{in} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + \dots + a_{1,n-1}\mathbf{A}_{1,n-1} + a_{1n}\mathbf{A}_{1n},$$

ossia che

$$(*) \quad \text{Det}\mathbf{A} = a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + \dots + a_{i,n-1}\mathbf{A}_{i,n-1} + a_{in}\mathbf{A}_{in}.$$

$(*)$ si chiama **lo sviluppo di Laplace del determinante di A rispetto alla i-esima riga di A**.

Quindi, per calcolare il determinante di una matrice $\mathbf{A}$, si puó partire mettendo in evidenza gli elementi di una riga qualunque, e non necessariamente la 1^a, come abbiamo fatto fino ad ora.

Esempio 5. Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matrice 2×2. Sviluppiamo il determinante di $\mathbf{A}$ rispetto alla 2^a riga di $\mathbf{A}$:

– mettiamo in evidenza gli elementi della 2^a riga di $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{pmatrix}$,

– $\mathbf{C}_{21}$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ togliendo la 2^a riga e la 1^a colonna, quindi $\mathbf{C}_{21} = (\, a_{12} \,)$; $\mathbf{C}_{22}$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ togliendo la 2^a riga e la 2^a colonna, quindi $\mathbf{C}_{22} = (\, a_{11} \,)$.

Allora

$$\begin{aligned} & a_{21}\mathbf{A}_{21} + a_{22}\mathbf{A}_{22} = a_{21}(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{22} = \\ & = -a_{21}\mathrm{Det}\,(\, a_{12} \,) + a_{22}\mathrm{Det}\,(\, a_{11} \,) = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = \\ & = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

dà lo stesso risultato che abbiamo ottenuto partendo dalla 1^a riga.

Conviene quindi sviluppare il determinante rispetto alla riga che contiene piú zeri.

Esempio 6. Riconsideriamo la matrice dell'Esempio 4, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, e calcoliamo il suo determinante rispetto alla 3^a riga (che contiene due zeri). Allora

$$\mathrm{Det}\mathbf{A} = (-2)(-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{3+4}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo separatamente $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. Per entrambe queste matrici 3×3 non è conveniente calcolare il determinante rispetto alla 3^a riga, ma è indifferente scegliere la 1^a o la 2^a. Per fare esercizio scegliamo in entrambi i casi la 2^a riga:

$$\begin{aligned} & \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \\ & = -2(0-15) - 4(-25-0) = 30 + 100 = 130 \\ & \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 6(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \\ & = -6(-25-0) + 2(5-0) = 150 + 10 = 160 \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = (-2) \times 130 + (-2) \times 160 = -580$ (lo stesso numero che avevamo ottenuto sviluppando il determinante rispetto alla 1^a riga).

Cosí come si puó sviluppare il determinante di una matrice rispetto ad una qualunque sua riga, lo si puó sviluppare rispetto ad una qualunque sua colonna, dal momento che vale il seguente

Teorema. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Allora, fissati $j \in \{1, \dots, n\}$ e si ha che

$$(**) \quad \mathrm{Det}\mathbf{A} = a_{1j}\mathbf{A}_{1j} + a_{2j}\mathbf{A}_{2j} + \dots + a_{n-1,j}\mathbf{A}_{n-1,j} + a_{nj}\mathbf{A}_{nj}.$$

$(**)$ si chiama **lo sviluppo di Laplace del determinante di A rispetto alla j-esima colonna di A**.

Conviene quindi sviluppare il determinante rispetto alla riga oppure alla colonna che contiene piú zeri.

Esempio 7. Riconsideriamo la matrice degli Esempi 4 e 6, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, e calcoliamo il suo determinante rispetto alla 3^a colonna (che contiene tre zeri). Allora

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\mathbf{A} &= 0 \times (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ 0 \times (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 5(-1)^{4+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= -5\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcoliamo $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ad esempio rispetto alla 2^a colonna:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= (-5)(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= (-5)(-1)(12+8) + 2(2+6) = 100 + 16 = 116 \end{aligned}$$

quindi $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = (-5) \times 116 = -580$ (si noti che è lo stesso numero che abbiamo ottenuto sviluppando il determinante rispetto alla 1^a oppure alla 3^a riga).

Proprietà del determinante.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$.

(1) Se $\mathbf{A}$ ha una riga (risp. una colonna) nulla, oppure se $\mathbf{A}$ ha due righe (risp. due colonne) uguali, allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = 0$.

(2) Se $\mathbf{A}'$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ mediante lo scambio di due righe (risp. due colonne) allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}') = -\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(3) Se $\mathbf{A}'$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sommando ad una riga (risp. ad una colonna) di $\mathbf{A}$ un'altra riga (risp. un'altra colonna) di $\mathbf{A}$ moltiplicata per un numero c, allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}') = \mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(4) Se $\mathbf{A}'$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ moltiplicando una riga (risp. una colonna) di $\mathbf{A}$ per un numero c, allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}') = c\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(5) $\mathrm{Det}(\mathbf{A}^T) = \mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(6) Se $\mathbf{B}$ è un'altra matrice $n \times n$ allora $\mathbf{Det(AB)=Det(A)\ Det(B)}$.

(7) **A è non singolare se e solo se Det(A)**$\neq 0$, e se $\mathbf{A}$ è non singolare si ha

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})}.$$

$\boxed{N.B.}$

Per quanto riguarda la proprietà (7), si ricordi che avevamo già osservato che una matrice 2×2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se il numero $ad - bc \neq 0$, e tale numero è proprio $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

Esercizio. Si provi che **il determinante di una matrice triangolare superiore (risp. inferiore) è il prodotto degli elementi diagonali**.

Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore (la dimostrazione è simile per le matrici triangolari inferiori):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & & & & & & \\ 0 & t_{22} & & & & & \\ 0 & 0 & t_{33} & & & * & \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & \mathbb{O} & & & \ddots & \\ 0 & & & & \dots & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo:

$\mathbf{T}_1$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{T}$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna ($\mathbf{T}_1$ è triangolare superiore $(n-1) \times (n-1)$):

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} t_{22} & & & & \\ 0 & t_{33} & & * & \\ 0 & 0 & t_{44} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & \mathbb{O} & & \\ 0 & & & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{T}_2$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{T}_1$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna ($\mathbf{T}_2$ è triangolare superiore

$(n-2) \times (n-2)$):

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} t_{33} & & & & \\ 0 & t_{44} & & * & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & \mathbb{O} & & & \\ & & & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

e cosí via per ogni $k = 2, \dots, n-1$ chiamiamo $\mathbf{T}_k$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{T}_{k-1}$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna. $\mathbf{T}_k$ è una matrice triangolare superiore $(n-k) \times (n-k)$.

Sviluppiamo il determinante di $\mathbf{T}$ ripetto alla 1^a colonna di $\mathbf{T}$:

$$\mathrm{Det}\mathbf{T} = t_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{T}_1 = t_{11}\mathrm{Det}\mathbf{T}_1.$$

Sviluppiamo il determinante di T_1 ripetto alla 1^a colonna di T_1:

$$\mathrm{Det}\mathbf{T} = t_{11}\mathrm{Det}\mathbf{T}_1 = t_{11}(t_{22}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{T}_2) = t_{11}t_{22}\mathrm{Det}\mathbf{T}_2.$$

Cosí procedendo otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\mathbf{T} &= t_{11}t_{22}\mathrm{Det}\mathbf{T}_2 = \\ &= t_{11}t_{22}t_{33}\mathrm{Det}\mathbf{T}_3 = \\ &= t_{11}t_{22}t_{33}t_{44}\mathrm{Det}\mathbf{T}_4 = \\ &= \qquad \dots \qquad = \\ &= t_{11}t_{22} \quad \dots \quad t_{n-1,n-1}\mathrm{Det}\mathbf{T}_{n-1} = \\ &= t_{11}t_{22} \quad \dots \quad t_{n-1,n-1}\mathrm{Det}\,(\, t_{nn}\,) = \\ &= t_{11}t_{22} \quad \dots \quad t_{n-1,n-1}t_{nn}.\end{aligned}$$

In particolare da ció segue:

Il determinante di una matrice diagonale è il prodotto degli elementi diagonali,

poichè le matrici diagonali sono particolari matrici triangolari superiori.

Esercizio. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Si provi che per ogni scalare c si ha:

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{A}) = c^n\mathrm{Det}(\mathbf{A}).$$

Si ha:

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{A}) \underset{\substack{\uparrow \\ c\mathbf{A}=c(\mathbf{I}_n\mathbf{A})=(c\mathbf{I}_n)\mathbf{A}}}{=} \mathrm{Det}((c\mathbf{I}_n)\mathbf{A}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proprietà 6 del det.}}}{=} \mathrm{Det}(c\mathbf{I}_n)\mathrm{Det}(\mathbf{A}).$$

Poichè $c\mathbf{I}_n$ è una matrice scalare $n \times n$, in particolare una matrice diagonale, per l'esercizio precedente si ha che

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{I}_n) = \text{ prodotto degli elementi diagonali di } c\mathbf{I}_n.$$

Tali elementi sono tutti uguali a c, ed il loro prodotto ha n fattori (perchè $c\mathbf{I}_n$ è $n \times n$), dunque $\mathrm{Det}(c\mathbf{I}_n) = c^n$, per cui

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{A}) = c^n\mathrm{Det}(\mathbf{A}).$$

ESERCIZI TIPO

ESERCIZIO TIPO 1 Risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nei tre seguenti casi:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(a) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$(\,\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\,) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 3 & 7 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U} \mid \mathbf{d}\,)$$

Poichè $\mathbf{d}$ è dominante, allora $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, non ha soluzioni.

(Infatti: il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 0 \\ x_3 & = -1 \\ 0 & = 1 \end{cases},$$

e poichè l'ultima equazione di $(*)$ non ha soluzioni, $(*)$ non ha soluzioni).

(b) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$(\,\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & | & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 5 & | & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 6 & | & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & | & 8 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U} \mid \mathbf{d}\,).$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 & = 4 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 & = 8 \\ x_5 & = 2 \end{cases}.$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere (la 2^a e la 4^a), $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ e con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_5 = 2 \\ x_3 = -2x_4 - 4x_5 + 8 = -2k - 4 \times 2 + 8 = -2k \\ x_1 = -3x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 + 4 = -3h + 2 \times (-2k) - k - 2 \times 2 + 4 = -3h - 5k \end{cases}$$

Dunque l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h - 5k \\ h \\ -2k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(c) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 3 \\ 1 & -1 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d})$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = 3 \\ x_3 & = 2 \end{cases}.$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ non ha colonne libere, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha esattamente una soluzione.

Con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = x_3 + 3 = 2 + 3 = 5 \\ x_1 = 2x_2 - x_3 = 2 \times 5 - 2 = 8 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione di $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, è il vettore $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO TIPO 2 Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3 & 3\alpha & 3 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1-i \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha \\ \alpha^2+3 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\,\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3\alpha & 3 & 3\alpha \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1-i & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha & \alpha^2+3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-i & 0 \\ 0 & 2 & 2\alpha & \alpha^2+3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{42}(-2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2+1 \end{array}\right) = (\,\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\,).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha = i \quad (\,\mathbf{B}(i) \quad | \quad \mathbf{c}(i)\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & i \\ 0 & 1 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(i) \quad | \quad \mathbf{b}(i)\,)$, quindi $\mathbf{A}(i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)$ è equivalente a $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + ix_2 + x_3 & = i \\ \qquad x_2 + ix_3 & = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}(i)$ è libera, $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}(i)$ ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$ ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}(i)$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = -ix_3 + 1 = -ih + 1 \\ x_1 = -ix_2 - x_3 + i = -i(-ih+1) - h + i = -h - i - h + i = -2h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}(i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ ih+1 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha \neq i$

$$(\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - i & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha-i})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-i})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha+i \end{pmatrix} = (\mathbf{C}(\alpha) | \quad \mathbf{d}(\alpha)) .$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha = -i$ $(\mathbf{C}(- i) \quad | \quad \mathbf{d}(- i)) = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & | & -i \\ 0 & 1 & -i & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\mathbf{A}(- i) \quad | \quad \mathbf{b}(- i))$, quindi $\mathbf{A}(- i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(- i)$ è equivalente a $\mathbf{C}(- i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(- i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 & = -i \\ \qquad x_2 - ix_3 & = 1 \\ \qquad\qquad x_3 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}(- i)$ è libera, $\mathbf{C}(- i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(- i)$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}(- i)$ sono dominanti, $\mathbf{C}(- i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(- i)$ ammette un'unica soluzione. Con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = ix_3 + 1 = 1 \\ x_1 = ix_2 - x_3 - i = i - i = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione di $\mathbf{C}(- i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(- i)$ (e quindi di $\mathbf{A}(- i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(- i)$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha \notin \{i, -i\}$

$$(\mathbf{C}(\alpha) | \quad \mathbf{d}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha+i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{D}(\alpha) | \quad \mathbf{e}(\alpha))$$

è una forma ridotta di Gauss per $(\ \mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\ )$. Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

ESERCIZIO TIPO 3

Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di $\mathbf{A}$ è una matrice 3×2 $\mathbf{R}$ tale che se $\mathbf{R} = (\mathbf{c}_1 \quad | \quad \mathbf{c}_2)$, allora

$\mathbf{c}_1$ è soluzione di (1) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{c}_2$ è soluzione di (2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$(\mathbf{A} \quad | \quad \mathbf{I}_2) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = (\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2).$$

(1) è equivalente a (1′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \\ \qquad\qquad x_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 2^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_3 = \dfrac{1}{4} \\ x_1 = x_2 - x_3 + \dfrac{1}{2} = h - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = h + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h + \frac{1}{4} \\ h \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 2^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = k \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - x_3 = k + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} k+\frac{1}{2} \\ k \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\mathbf{R(h,k)} = \begin{pmatrix} h+\frac{1}{4} & k+\frac{1}{2} \\ h & k \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, al variare di $h,k \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO TIPO 3 bis

Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Poniamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$.

2. Cerchiamo tutte le inverse destre di $\mathbf{B}$. Dall'ESERCIZIO TIPO 3 sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} h+\frac{1}{4} & k+\frac{1}{2} \\ h & k \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ con $h,k \in \mathbb{C}$.

3. Una matrice è inversa sinistra di $\mathbf{A}$ se e solo se è la trasposta di una inversa destra di $\mathbf{B}$. Quindi le inverse sinistre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\begin{pmatrix} h+\frac{1}{4} & h & \frac{1}{4} \\ k+\frac{1}{2} & k & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ al variare di $h,k \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO TIPO 4 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$$(\,\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{I}_3\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha^2 & -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-2\alpha)E_1(\frac{1}{\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 0 : \mathbf{A}(0) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & -1 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\alpha & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{1+2\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq -\frac{1}{2} : \mathbf{A}(-\frac{1}{2}) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & -1 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-\alpha)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\alpha & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{array}\right).$$

Se $\boxed{\alpha \notin \{0, -\frac{1}{2}\}}$ $\qquad \mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{pmatrix}.$

ESERCIZIO TIPO 5

(1) Si provi che $\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(2) Sia $\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Si dica se $\mathcal{S}_2$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(1) Per provare che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ occorre provare che per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 + \alpha_5\mathbf{v}_5 =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + \alpha_4 \\ 4\alpha_3 - 2\alpha_4 + \alpha_5 \end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + \alpha_4 = b \\ 4\alpha_3 - 2\alpha_4 + \alpha_5 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 6 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-2)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & c \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-4)E_2(-1/2)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & (2a-b)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c-4a+2b \end{array}\right) = (\,\mathbf{U}_1 \quad | \quad \mathbf{d}_1\,).$$

Poichè $\mathbf{d}_1$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora $(*)$ ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, per cui $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(2) Per sapere se $\mathcal{S}_2$ è o meno un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ dobbiamo verificare se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistano o meno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_3 + \alpha_4\mathbf{w}_4 + \alpha_5\mathbf{w}_5 =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 4\alpha_5 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 + 3\alpha_5 \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \end{pmatrix}$$

ossia se il sistema lineare

$$(*)\qquad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 4\alpha_5 = a \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 + 3\alpha_5 = b \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ abbia o meno soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Se $(*)$ avesse soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$ allora $\mathcal{S}_2$ sarebbe un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$, in caso contrario (ossia se esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $(*)$ non ha soluzione) no.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & | & a \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & | & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & | & a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & | & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & c+b-a \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U}_2 \quad | \quad \mathbf{d}_2\,).$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{d}_2$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $\mathcal{S}_2$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$

(in altre parole: poichè esistono dei vettori di $\mathbb{R}^3$ che **NON** si possono esprimere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_2$, ad esempio il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora $\mathcal{S}_2$ **NON** è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$).

ESERCIZIO TIPO 6

Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Si dica se $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\} \subset \mathbb{C}^4$ è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

Siano $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{C}$ tali che

$$(*) \qquad \mathbf{0} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \delta\mathbf{v}_3 + \gamma\mathbf{v}_4 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta + \delta - \gamma \\ 3\alpha + 4\beta + \delta + 2\gamma \\ -\alpha + \delta - 2\gamma \end{pmatrix}.$$

Allora $(*)$ equivale a (1) $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta & = 0 \\ \beta + \delta - \gamma & = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + \delta + 2\gamma & = 0 \\ -\alpha + \delta - 2\gamma & = 0 \end{cases}$.

(1) è un sistema lineare nelle incognite $\alpha, \beta, \delta, \gamma$.

(1) ha sempre la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ossia $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$).

Se essa dovesse essere l'unica soluzione di (1) (quindi se (1) avesse un'unica soluzione) allora $\mathcal{S}$ sarebbe L.I., altrimenti, se (1) ha anche una soluzione non nulla (quindi se (1) ha piú di una soluzione) allora $\mathcal{S}$ è L.D.

Cerchiamo allora le soluzioni di (1). Facendo una eliminazione di Gauss sulla sua matrice aumentata si ottiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{41}(1)E_{31}(-3)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[E_{42}(-2)E_{32}(2)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0})$$

Dunque (1) è equivalente ad (1′) $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta & = 0 \\ \beta + \delta - \gamma & = 0 \end{cases}$

Scegliendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne non dominanti di U (la 3^a e la 4^a), con la sostituzione all'indietro si ottiene $\begin{cases} \gamma = h \\ \delta = k \\ \beta = -\delta + \gamma = -k + h \\ \alpha = -2\beta - \delta = -2(-k + h) - k = k - 2h \end{cases}$

Il sistema (1′) ha ∞^2 soluzioni: tutti gli elementi dell'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} k - 2h \\ -k + h \\ k \\ h \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

Prendendo ad esempio $h = 1$ e $k = 0$ si ottiene $\alpha = -2$, $\beta = \gamma = 1$, $\delta = -1$ e $-2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$.
Quindi $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ è linearmente dipendente.

ESERCIZIO TIPO 7

Sia W l'insieme delle matrici 2×2 reali triangolari superiori. L'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W. Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{1^0 \text{ MODO}}$ "Restringiamo" un insieme di generatori di W.

1^0 **passaggio**. Esistono in $\mathcal{S}$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}$?

$\mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{C}_4 = \mathbf{O} = 0\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_5 + 0\mathbf{C}_6,$$

per cui togliamo subito $\mathbf{C}_4$ (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di $\mathcal{S}$ che siano nulli**), **e poniamo**

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

2^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_1$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_1$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_1$? Poichè

$$\mathbf{C}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{C}_6 = 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_5 - \frac{1}{2}\mathbf{C}_6$$

ma anche

$$\mathbf{C}_6 = -2\mathbf{C}_1 = -2\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_5$$

possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{C}_1$, oppure possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{C}_6$, ottenendo ancora un insieme di generatori di W. Dunque, **guardiamo se tra i vettori di $\mathcal{S}_1$ ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno di due vettori**. In questo caso abbiamo individuato la coppia $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_6$ e scegliamo di togliere $\mathbf{C}_1$.

Poniamo

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

3^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_2$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_2 + \alpha_2\mathbf{C}_3 + \alpha_3\mathbf{C}_5 + \alpha_4\mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_2$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 & 3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_4 \\ 0 & \alpha_3 - 4\alpha_4 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - 4\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & | & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 14 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix},$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 + 14\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - 4\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 10h \\ -26h \\ 4h \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio $\begin{pmatrix} 10 \\ -26 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (si ponga $h = 1$), si ottiene

$$10\mathbf{C}_2 - 26\mathbf{C}_3 + 4\mathbf{C}_5 + \mathbf{C}_6 = \mathbf{O},$$

per cui $\mathbf{C}_2$,$\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_5$ e $\mathbf{C}_6$ sono combinazioni lineari degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$ e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da eliminare da $\mathcal{S}_2$.

Scegliamo di togliere da $\mathcal{S}_2$ la matrice $\mathbf{C}_2$ (combinazione lineare degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$) e poniamo

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}$$

4^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_3$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_3$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_3$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_3 + \alpha_2\mathbf{C}_5 + \alpha_3\mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_3$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_1 - 4\alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 - 4\alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -6 & | & 0 \\ 0 & 1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & -10 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

L'unica soluzione del sistema è quella nulla, per cui $\mathcal{S}_3$ è linearmente indipendente, ed è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$ Invece di togliere successivamente vettori che siano combinazioni lineari di quelli rimasti, ossia invece di "restringere" insiemi di generatori, si puó "allargare" insiemi L.I.

Ad esempio:

1. $\mathbf{C}_1 \neq \mathbf{0}$ per cui $\{\mathbf{C}_1\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{C}_1$. Chiamiamo $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$.

2. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{C}_2$. Chiamiamo $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1$.

3. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{C}_3$. Chiamiamo $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2$.

4. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_4\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{C}_4$. Chiamiamo $\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_3 \setminus \{\mathbf{C}_4\} = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_5; \mathbf{C}_6\}$.

5. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_5\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{C}_5$. Chiamiamo $\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_4 \setminus \{\mathbf{C}_5\} = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_6\}$.

6. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_6\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{C}_6$. Chiamiamo $\mathcal{S}_6 = \mathcal{S}_5 \setminus \{\mathbf{C}_6\} = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3\}$.

Dunque $\mathcal{S}_6 = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3\}$ è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

ESERCIZIO TIPO 8

Si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A})$ della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Poichè $N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U})$ per ogni forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ di $\mathbf{A}$, troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

$\mathbf{U}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$. Per il teorema "nullità + rango"si ha

$$\dim \mathrm{N}(\mathbf{U}) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{U} \text{ - rk}(\mathbf{U})) = 4 - 2 = 2.$$

Poichè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

scegliendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ (la 2^a e la 4^a) con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 & = & h & & \\ x_4 & = & k & & \\ x_3 & = & -x_4 & = & -k \\ x_1 & = & -2x_2 - x_3 & = & -2h-(-k) = \quad -2h+k \end{cases}$$

Quindi

$$N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2h+k \\ h \\ -k \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$$

e chiamando $\mathbf{v}_1$ l'elemento di $N(\mathbf{A})$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = 0$ e $\mathbf{v}_2$ l'elemento di $N(\mathbf{A})$ che si ottiene ponendo $h = 0$ e $k = 1$, si ha che una base di $N(\mathbf{A})$ è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO TIPO 9

Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4i \\ 1 & \alpha+i & 4i \\ 2 & 0 & \alpha^2+1+8i \\ 0 & \alpha+i & \alpha^2+1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4i \\ 1 & \alpha+i & 4i \\ 2 & 0 & \alpha^2+1+8i \\ 0 & \alpha+i & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4i \\ 0 & \alpha+i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+1 \\ 0 & \alpha+i & \alpha^2+1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\alpha \neq -i$ $\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4i \\ 0 & \alpha+i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+1 \\ 0 & \alpha+i & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-\alpha-i)E_2(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & \alpha^2+1 \end{pmatrix} = \mathbf{C}_\alpha$

$\boxed{1^o Sottocaso}$ $\alpha \neq -i, i:$ $\mathbf{C}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-\alpha^2-1)E_3(\frac{1}{\alpha^2+1})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$

$$rk(\mathbf{A}_\alpha) = 3, \quad \mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha+i \\ 0 \\ \alpha+i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4i \\ 4i \\ \alpha^2+1+8i \\ \alpha^2+1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{2^o Sottocaso}$ $\alpha = i:$ $\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_i$

$$rk(\mathbf{A}_i) = 2, \quad \mathcal{D}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{2^o CASO}$ $\alpha = -i : \mathbf{B}_{-i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{-i}, rk(\mathbf{A}_{-i}) = 1, \mathcal{D}_{-i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4i \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_{-i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

ESERCIZIO TIPO 10

Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\} \subset K^n$, dove $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Per vedere se $\mathcal{B}$ è una base o meno di K^n si puó procedere nel seguente modo:

(1) si costruisce la matrice $n \times n$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$ le cui colonne sono gli elementi di $\mathcal{B}$;

(2) dal momento che sappiamo che esiste una base di $C(\mathbf{A})$ contenuta in $\mathcal{B}$,

$$\text{dim C}(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff \text{ogni base di C}(\mathbf{A}) \text{ ha n elementi} \iff \mathcal{B} \text{ è una base di C}(\mathbf{A});$$

(3) osserviamo che se V è uno spazio vettoriale ed U un suo sottospazio, si ha che

$$U = V \qquad \iff \qquad \text{dim U} = \text{dim V}.$$

Da (2) e (3) segue che per la matrice $\mathbf{A}$ costruita in (1) si ha:

$$rk(\mathbf{A}) = n \qquad \iff \qquad \mathcal{B} \text{ è una base di } K^n.$$

ESERCIZIO Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Costruiamo una matrice le cui colonne siano gli elementi di $\mathcal{B}_\alpha$: $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$. Il problema diventa stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che rk$\mathbf{A}_\alpha = 3$. Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}_\alpha$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

1^0 CASO: $\alpha = 0$ $\quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}_0, \quad rk(\mathbf{A}_0) = rk(\mathbf{U}_0) = 2 \neq 3 \Longrightarrow \mathcal{B}_0$ **NON E'** una base di $\mathbb{R}^3$.

2^0 CASO: $\alpha \neq 0$ $\quad \mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/\alpha)E_2(-1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$

$$rk(\mathbf{A}_\alpha) = rk(\mathbf{U}_\alpha) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}_\alpha \quad \textbf{E'} \text{ una base di } \mathbb{R}^3.$$

ESERCIZIO TIPO 11 Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ definita da

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4a+b \\ 3a \\ a-2b \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è $\mathbf{A} = \left(C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix})) \quad C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix})) \right)$. Poichè

$$f(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{a=2, b=6}}}{=} \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{a=2, b=-4}}}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

allora $\mathbf{A} = \left(C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}) \right)$. Piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix})$, e calcoliamo $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai due diversi vettori $\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\delta \\ 3\beta \\ \alpha-\delta \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{cases} \alpha+\delta = a \\ 3\beta = b \\ \alpha-\delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = (a+c)/2 \\ \beta = b/3 \\ \delta = (a-c)/2 \end{cases} \implies C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+c)/2 \\ b/3 \\ (a-c)/2 \end{pmatrix}.$$

Ponendo $a = 14$, $b = 6$ e $c = -10$ otteniamo $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$; ponendo $a = 4$, $b = 6$ e $c = 10$ otteniamo $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 12

Si calcoli la matrice di passaggio $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, dove $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono le seguenti basi ordinate di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\},\qquad \mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

La matrice di passaggio $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}=\left(C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix})\quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix})\quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix})\right).$$

Nell'ESERCIZIO TIPO 11 abbiamo calcolato

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}(a+c)/2\\b/3\\(a-c)/2\end{pmatrix}.$$

Specializzando la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$ otteniamo

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Dunque

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 13

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$$

dove $\mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}$, e $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Nell'ESERCIZIO TIPO 12 abbiamo calcolato $\mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcoliamo la sua inversa:

$$(\, \mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} \quad | \quad \mathbf{I}_3 \,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{3}(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) = (\, \mathbf{I}_3 \quad | \quad \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} \,).$$

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}'\leftarrow\mathcal{D}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \left(C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}) \right).$$

Calcoliamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, e specializziamo la formula ottenuta ai due diversi vettori $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 2\beta \\ 6\alpha - 4\beta \end{pmatrix}$$

risolvendo il sistema lineare $\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = a \\ 6\alpha - 4\beta = b \end{cases}$ (nelle incognite α e β)si ottiene

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{2a+b}{10} \\ \frac{3a-b}{10} \end{pmatrix}.$$

Ponendo $a = 6$ e $b = 8$ otteniamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; ponendo $a = 2$ e $b = -4$ otteniamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -36 & 19 \\ 2 & 2 \\ 24 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -53 & 19 \\ 6 & 2 \\ 37 & -11 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 14

Si trovi una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{C}^4$

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \rangle.$$

$\boxed{1^0\textbf{MODO}}$

$\boxed{1}$ Troviamo una base $\mathcal{B}_1$ di V.

Poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e costruiamo la matrice $\mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4)$, ossia una matrice tale che $C(\mathbf{A}) = V$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)E_{32}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Dunque $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = V$.

$\boxed{2}$ Troviamo una base ortogonale $\mathcal{B}_2$ di V: poniamo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2$ e $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_4$, e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = i/2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \\ &= \mathbf{v}_2 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = -\frac{2}{5}i$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \\ &= \mathbf{v}_3 + \frac{2i}{5}\mathbf{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5}\begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3\}$, dove

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Troviamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V, normalizzando gli elementi di $\mathcal{B}_2$.

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2} \\ &\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{5/2} \\ &\|\mathbf{u}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)} = \sqrt{\mathbf{u}_3^H\mathbf{u}_3} = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}\end{aligned}$$

$\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}; \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2}\}$, dove

$$\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

$\boxed{2^0\textbf{MODO}}$

$\boxed{1}$ Costruiamo dapprima **un insieme di generatori ortogonale di V**: poniamo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$. Otterremo 4 vettori, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$, e l'insieme $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3; \mathbf{u}_4\}$ sarà un insieme di generatori ortogonale di V.

Per sapere se alcuni degli $\mathbf{u}_i$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss U della matrice A che ha come colnne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$: le eventuali colonne libere di U corrisponderanno agli $\mathbf{u}_i$ nulli.

$$\mathbf{A} = (\,\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4\,) = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)E_{32}(-1)]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come unica colonna libera la 3^a, allora applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ otterremo $\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (\,1 \quad 0 \quad -i \quad 0\,) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (\,1 \quad 0 \quad -i \quad 0\,) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = i/2$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{i}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = -1$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 =$$

$$= \mathbf{v}_3 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \alpha_{14}\mathbf{u}_1 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 - \alpha_{34}\mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_4) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{14} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{24} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_4) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{24} = -\frac{2}{5}i$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{34} = 0 \quad \text{per def.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_4 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 = \\ &= \mathbf{v}_4 + \frac{2i}{5}\mathbf{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori ortogonale di V.

$\boxed{2}$ Costruiamo **una base ortogonale di V** togliendo dall'insieme di generatori ortogonale di V trovato al punto $\boxed{1}$ gli eventuali $\mathbf{u}_i$ nulli. In questo caso poniamo:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}.$$

L'insieme $\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{2}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{2}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$:

$$\|\mathbf{w}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}$$
$$\|\mathbf{w}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{5/2}$$
$$\|\mathbf{w}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_4|\mathbf{u}_4)} = \sqrt{\mathbf{u}_4^H\mathbf{u}_4} = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Allora $\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2}; \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2}; \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2}\}$, dove

$$\frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

ESERCIZIO TIPO 15

Si calcoli la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} i \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^4$.

$\boxed{1}$ Troviamo una base ortonormale di U. Dall'ESERCIZIO TIPO 14 otteniamo che

$$\left\{ \mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3^* = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di U.

$\boxed{2}$ La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} i \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ su U è

$$P_U(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_2^* + (\mathbf{u}_3^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_3^*$$

dove

$$(\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*)^H\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - i) = 0$$

$$(\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_2^*)^H\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -i & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1 + 6 + 1 - 8) = 0$$

$$(\mathbf{u}_3^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_3^*)^H\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15}}(-i - 6i - i - 12i) = -\frac{20}{\sqrt{15}} \cdot i$$

Quindi

$$P_U(\mathbf{v}) = -\frac{20}{\sqrt{15}} \cdot i \cdot \mathbf{u}_3^* = -\frac{20}{\sqrt{15}} \cdot i \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} = -\frac{20}{15} \cdot i \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} = -\frac{4}{3} \begin{pmatrix} -i \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 16

Sia $\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} z & \overline{z} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dove $z \in \mathbb{C}$.

Si dica per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(z)$ è non singolare.

$\mathbf{A}(z)$ è non singolare se e solo se $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \neq 0$. Calcoliamo dunque $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z))$.

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppato rispetto} \\ \text{alla } 2^a \text{ riga}}}{=} (-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} & 0 \\ 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppato rispetto} \\ \text{alla } 3^a \text{ colonna}}}{=} -(z-i)(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (z-i)(z-\overline{z})$$

Quindi $\mathbf{A}(z)$ è non singolare se e solo se $(z-i)(z-\overline{z}) \neq 0$.

Si osservi che $(z-i)(z-\overline{z}) = 0$ se e solo se o $z-i=0$, e quindi $z=i$, oppure $z-\overline{z}=0$, e quindi $z=\overline{z}$. Poichè

$$z = \overline{z} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{R},$$

allora

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \cup \{i\}$$

e quindi

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z \notin \mathbb{R} \cup \{i\}.$$

Concludendo

$$\mathbf{A}(z) \text{ è non singolare} \quad \Longleftrightarrow \quad z \notin \mathbb{R} \cup \{i\}.$$

ESERCITAZIONI A GRUPPI TESTI

ESERCITAZIONI* 1

$\boxed{1}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è scalare, diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Si calcoli $\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C}$.

$\boxed{3}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si trovino tutte le matrici reali $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

$\boxed{4}$ Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{A}$ triangolari superiori tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$.

$\boxed{5}$ Siano $\mathbf{A}$ una matrice reale $2 \times n$ non nulla in cui la prima riga è il triplo della seconda. Si trovino tutte le matrici reali diagonali $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{DA}$ abbia tutte le righe uguali.

$\boxed{6}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H$.

$\boxed{7}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è simmetrica, anti-simmetrica, hermitiana, anti-hermitiana o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2+3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{8}$ Si calcolino la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana della matrice complessa $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix}$ e della sua H-trasposta $\mathbf{A}^H$.

$\boxed{9}$ Siano $\mathbf{B}$ una matrice quadrata di ordine $n-1$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori colonna con $n-1$ coordinate tali che $\mathbf{v}^T\mathbf{w} = 0$. Si consideri la matrice a blocchi $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{v}^T \\ - & | & --- \\ \mathbf{w} & | & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, dove $a \in \mathbb{R}$. Si provi che se $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \mathbf{O}$, allora la prima colonna di $\mathbf{A}^2$ è $a\begin{pmatrix} a \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$.

ESERCITAZIONI* 2

$\boxed{1}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 10 & 8 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Si trovino forme ridotte di Gauss per $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

$\boxed{2}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix}$, $\quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}(\alpha)$ per $\mathbf{A}(\alpha)$ e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di $\mathbf{U}(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCITAZIONI* 3

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & 7+i \\ 3-i & 1 \end{pmatrix}$. Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$.

$\boxed{2}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i & \alpha - i \\ -2i & \alpha \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$\boxed{4}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{5}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{6}$ Sia $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$ l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n. Si provi che W è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine n.

$\boxed{7}$ Sia $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A}^H = -\mathbf{A}\}$ l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n. Si provi che W non è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine n.

$\boxed{8}$ Sia $V = \mathbb{R}^3$ (spazio vettoriale reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$$\mathrm{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathrm{S}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a-b \\ 0 \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ a+1 \end{pmatrix} |a \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} |a \in \mathbb{R} \right\}.$$

ESERCITAZIONI* 4

$\boxed{1}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2.

1. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$.

2. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(b)** $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(c)** $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{2}$ Si dica se $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{3}$ Siano V uno spazio vettoriale complesso ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ un insieme di generatori di V. Si provi che anche $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\}$ è un insieme di generatori di V.

$\boxed{4}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \right\}.$$

$\boxed{5}$ Siano V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di V.

Si dica quale dei seguenti insiemi di vettori di V è linearmente indipendente:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}, \\ &(2) \quad \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}. \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta nel seguente insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{7}$ Sia W l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche. L'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W. Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{8}$ Qual è la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche ?

ESERCITAZIONI* 5

$\boxed{1}$ Si dica quale delle seguenti posizioni, al variare di $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$, definisce un'applicazione lineare da $M_2(\mathbb{C})$ in $M_2(\mathbb{C})$: $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{I_2}$, $f_3(\mathbf{A}) = 2\mathbf{A}$, $f_4(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$, e quale delle seguenti posizioni, al variare di $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$, definisce un'applicazione lineare da $M_2(\mathbb{C})$ in $\mathbb{C}^2$: $g_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1}$, $g_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1} + \mathbf{e_1}$.

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice complessa 2×2 tale che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

(a) Si provi che $C(\mathbf{A} - \mathbf{I_2}) \subseteq N(\mathbf{A})$.

(b) Si provi che se inoltre $\mathbf{O} \neq \mathbf{A} \neq \mathbf{I_2}$ allora $C(\mathbf{A} - \mathbf{I_2}) = N(\mathbf{A})$.

$\boxed{3}$ Siano $\mathbf{A}$ una matrice complessa $m \times n$ ed $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ l'applicazione lineare indotta da $\mathbf{A}$. Si provi che $f_{\mathbf{A}}$ è iniettiva se e solo se $\mathbf{A}$ ha un'inversa sinistra.

$\boxed{4}$ Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A}_\alpha)$ di $\mathbf{A}_\alpha$.

$\boxed{5}$ Sia $\quad \mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$.

$\boxed{6}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

$\boxed{7}$ Siano

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Si provi che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$.

(2) Si calcolino le matrici di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ e $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

ESERCITAZIONI* 6

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D}' = \left\{ \mathbf{w}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente.

$\boxed{2}$ Si verifichi che $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = |2a - b| + |a + c| + |ib|$ è una norma.

$\boxed{3}$ Sia $V = M_2(\mathbb{C})$. Si verifichi che $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ definito da

$$(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i$$

è un prodotto interno.

$\boxed{4}$ Sia $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norma indotta dal prodotto interno $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definito nell'esercizio precedente. Si calcoli $\left\| \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -2+3i \end{pmatrix} \right\|$.

$\boxed{5}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{C}^4$

$$V = \langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

$\boxed{6}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^4$.

ESERCITAZIONI* 7

$\boxed{1}$ Si trovi una base di $V^\perp$ nei seguenti casi:

$$V = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \rangle, \qquad V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

$\boxed{2}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

ESERCITAZIONI A GRUPPI SVOLGIMENTO

SVOLGIMENTO ESERCITAZIONI* 1

$\boxed{1}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è scalare, diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

scalari: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

diagonali: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

triang. sup.: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

triang. inf.: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

nessuna delle precedenti: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Si calcoli $\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C}$.

$$4\mathbf{C} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 2 + 2 \times 0 & 4 \times 1 + 2 \times 1 \\ 1 \times 2 + 0 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 1 \\ (-1) \times 2 + (-2) \times 0 & (-1) \times 1 + (-2) \times 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8+0 & 4+2 \\ 2+0 & 1+0 \\ -2+0 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-2\mathbf{A} = -2\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -2 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{DC} - 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -2 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2\times(-4)+1\times 0+0\times(-6) & 2\times 6+1\times 7+0\times 1 \\ 4\times(-4)-2\times 0-3\times(-6) & 4\times 6-2\times 7-3\times 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -8+0+0 & 12+7+0 \\ -16+0+18 & 24-14-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 23 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si trovino tutte le matrici reali $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Sia $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ una matrice reale 2×2. Poichè

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} \qquad \text{e} \\ \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix},\end{aligned}$$

la condizione $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ equivale a $\begin{cases} x+z = x \\ y+t = x+y \\ z = z \\ t = z+t \end{cases}$, ossia a $\begin{cases} z = 0 \\ \\ t = x \end{cases}$

Dunque le matrici 2×2 reali $\mathbf{B}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \qquad \text{dove} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{4}$ Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{A}$ triangolari superiori tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice reale 2×2 triangolare superiore. Dunque $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$, con $x, y, z \in \mathbb{R}$. Poichè

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy+yz \\ 0 & z^2 \end{pmatrix},$$

allora

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 = 1 \\ z^2 = 1 \\ y(x+z) = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ottiene che $x, z \in \{1, -1\}$.

Se $z = -x$ (ossia se $\{x, z\} = \{1, -1\}$), l'ultima equazione è soddisfatta per ogni valore di y. Si ottengono cosí le famiglie di matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}.$$

Se $z \neq -x$ (per cui $z = x = 1$ oppure $z = x = -1$), dall'ultima equazione si deduce, dividendo ambo i membri per $x + z \neq 0$, che $y = 0$. Si ottengono cosí le due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Siano $\mathbf{A}$ una matrice reale $2 \times n$ non nulla in cui la prima riga è il triplo della seconda. Si trovino tutte le matrici reali diagonali $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{DA}$ abbia tutte le righe uguali.

Poichè $\mathbf{A}$ ha due righe ed esiste $\mathbf{DA}$, allora $\mathbf{D}$ ha due colonne. Quindi, essendo $\mathbf{D}$ diagonale reale, è $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ per opportuni numeri reali d_1 e d_2.

Dalla condizione che la prima riga di $\mathbf{A}$ è il triplo della seconda segue che se $\mathbf{r}^T$ è la seconda riga di $\mathbf{A}$ (quindi un vettore riga con n coordinate), allora $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3\mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \end{pmatrix}$, per cui

$$\mathbf{DA} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3d_1\mathbf{r}^T \\ d_2\mathbf{r}^T \end{pmatrix}.$$

A questo punto la condizione che $\mathbf{DA}$ abbia le righe uguali comporta che $3d_1\mathbf{r}^T = d_2\mathbf{r}^T$.

Se fosse $\mathbf{r}^T = \mathbf{0}^T$ non potremmo trarre alcuna conclusione su d_1 e d_2. Ma $\mathbf{r}^T \neq \mathbf{0}^T$, altrimenti entrambe le righe di $\mathbf{A}$ sarebbero nulle, mentre $\mathbf{A}$ è supposta non nulla. Ora

$$\left.\begin{aligned} 3d_1\mathbf{r}^T &= d_2\mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T &\neq \mathbf{0}^T \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad 3d_1 = d_2,$$

per cui ogni matrice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 3d \end{pmatrix}$ con d numero reale è soluzione del nostro problema.

$\boxed{6}$ Siano $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = (\,2 \quad 1+i\,), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}.$

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H$.

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2-3i & 0 & 1-i \\ 1+i & i & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2+3i & 1-i \\ 0 & -i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}^H = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 3+5i & 6 & 2-2i \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}^H = \begin{pmatrix} 3-5i & 6 & 2+2i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 7+i & 3-2i \\ 2+3i & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 7-i & 2-3i \\ 3+2i & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}^H = \begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H =$

$$= (\begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + (1+3i) \begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} (2+3i)(3-5i)+(1+i)(2+2i) \\ (1-i)(3-5i)-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ i(1+i) \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1+3i)(7-i) & (1+3i)(3+2i) \\ (1+3i)(2-3i) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+9i-10i+15+2+2i+2i-2 \\ 3-3i-5i-5-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7+21i-i+3 & 3+9i+2i-6 \\ 2+6i-3i+9 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} 21+3i \\ -12i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ -1+i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21+5i \\ -1-11i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(21+5i) & (21+5i)(1-i) \\ 2(-1-11i) & (-1-11i)(1-i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 21+5i-21i+5 \\ -2-22i & -1-11i+i-11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 26-16i \\ -2-22i & -12-10i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52+30i & 23-5i \\ 9-19i & -12-10i \end{pmatrix}$$

$\boxed{7}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è simmetrica, anti-simmetrica, hermitiana, anti-hermitiana o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2+3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

simmetriche:	$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2+3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
anti-simmetriche:	$\begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{pmatrix}$
hermitiane:	$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
anti-hermitiane:	$\begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{pmatrix}$
nessuna delle precedenti:	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{8}$ Si calcolino la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana della matrice complessa $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix}$.

Poichè $\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 2-i & 3 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}$, la parte hermitiana di $\mathbf{A}$ è

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^H}{2} = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-i & 3 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

e la parte anti-hermitiana di $\mathbf{A}$ è

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^H}{2} = \begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-i & 3 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2i & -5 \\ 5 & -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -i \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ con $\mathbf{B}^H = \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}^H = -\mathbf{C}$.

Troviamo ora la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana di $\mathbf{A}^H$. Facendo la H-trasposta di $\mathbf{A} = \mathbf{B}+\mathbf{C}$ si ottiene

$$\mathbf{A}^H = (\mathbf{B}+\mathbf{C})^H = \mathbf{B}^H + \mathbf{C}^H = \mathbf{B} + (-\mathbf{C}),$$

e poichè $\mathbf{B}^H = \mathbf{B}$ (ossia $\mathbf{B}$ è hermitiana) e $(-\mathbf{C})^H = -\mathbf{C}^H = -(-\mathbf{C})$ (ossia $-\mathbf{C}$ è anti-hermitiana), allora $\mathbf{B}$ è la parte hermitiana di $\mathbf{A}^H$ e $-\mathbf{C}$ è la parte anti-hermitiana di $\mathbf{A}^H$.

$\boxed{9}$ Siano $\mathbf{B}$ una matrice quadrata di ordine $n-1$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori colonna con $n-1$ coordinate tali che $\mathbf{v}^T\mathbf{w} = 0$. Si consideri la matrice a blocchi $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & \mid & \mathbf{v}^T \\ - & \mid & --- \\ \mathbf{w} & \mid & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, dove $a \in \mathbb{R}$. Si provi che se $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \mathbf{O}$, allora la prima colonna di $\mathbf{A}^2$ è $a\begin{pmatrix} a \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$.

Calcolando il prodotto a blocchi

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} a & \mid & \mathbf{v}^T \\ - & \mid & --- \\ \mathbf{w} & \mid & \mathbf{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \mid & \mathbf{v}^T \\ - & \mid & --- \\ \mathbf{w} & \mid & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + \mathbf{v}^T\mathbf{w} & \mid & a\mathbf{v}^T + \mathbf{v}^T\mathbf{B} \\ ------- & \mid & ------- \\ \mathbf{w}a + \mathbf{B}\mathbf{w} & \mid & \mathbf{w}\mathbf{v}^T + \mathbf{B}^2 \end{pmatrix}$$

si ottiene che la prima colonna di $\mathbf{A}^2$ è $\begin{pmatrix} a^2+\mathbf{v}^T\mathbf{w} \\ ------- \\ \mathbf{w}a+\mathbf{B}\mathbf{w} \end{pmatrix}$. Essendo per ipotesi $\mathbf{v}^T\mathbf{w}=0$, ed essendo $\mathbf{w}a=a\mathbf{w}$ perchè a è uno scalare, la prima colonna di $\mathbf{A}^2$ è $\begin{pmatrix} a^2 \\ ------- \\ a\mathbf{w}+\mathbf{B}\mathbf{w} \end{pmatrix}$. Calcolando il prodotto a blocchi

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{v}^T \\ - & | & --- \\ \mathbf{w} & | & \mathbf{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^T\mathbf{w} \\ --- \\ \mathbf{B}\mathbf{w} \end{pmatrix},$$

da $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ si ricava che $\mathbf{B}\mathbf{w}=\mathbf{0}$. Dunque la prima colonna di $\mathbf{A}^2$ è

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ ------- \\ a\mathbf{w}+\mathbf{B}\mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ - \\ a\mathbf{w} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} a \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

SVOLGIMENTO ESERCITAZIONI* 2

$\boxed{1}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 10 & 8 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Si trovino forme ridotte di Gauss per $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 10 & 8 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-3)E_1(1/4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(3)E_2(1/4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1$$

ed U_1 è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{B}$ si ottiene:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_2$$

ed $\mathbf{U}_2$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{B}$.

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}(\alpha)$ per $\mathbf{A}(\alpha)$ e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di $\mathbf{U}(\alpha)$.

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{2}i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2+8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha)$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\alpha^2+4 \neq 0$ ossia $\alpha \neq 2i$ ed $\alpha \neq -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2+8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2\alpha^2-8)E_2(\frac{1}{\alpha^2+4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{C}(\alpha)$$

$\boxed{1^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\quad \alpha \neq 2i, \quad \alpha \neq -2i, \quad \alpha \neq 0$

$$\mathbf{C}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 2^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 3^a.

$\boxed{2^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\quad \alpha = 0 \qquad \mathbf{C}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(0)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(0)$, le colonne dominanti sono la 1^a e la 2^a, quelle libere la 3^a e la 4^a.

$\boxed{2^o CASO}$ $\quad \alpha^2 + 4 = 0$ ossia $\alpha = 2i$ oppure $\alpha = -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2\alpha) \quad (\alpha \neq 0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 3^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 2^a.

$\boxed{3}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\,\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\,) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 9 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\,\mathbf{U} \mid \mathbf{d}\,).$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad\quad x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ (la 2^a e la 4^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = h - 3(-\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}) - 2k + 2 = h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{4}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\,\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & | & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\,).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = -i \qquad (\,\mathbf{B}(-\mathbf{i}) \quad | \quad \mathbf{c}(-\mathbf{i})\,) = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 & | & -2i \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(-\mathbf{i}) \quad | \quad \mathbf{b}(-\mathbf{i})\,)$, quindi $\mathbf{A}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(-\mathbf{i})$ è equivalente a $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}(-\mathbf{i})$ è libera, $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}(-\mathbf{i})$ ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}(-\mathbf{i})$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(-\mathbf{i})$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \neq -i$

$$(\,\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} = (\,\mathbf{C}(\alpha) | \quad \mathbf{d}(\alpha)\,).$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha = i \qquad (\,\mathbf{C}(\mathbf{i}) \quad | \quad \mathbf{d}(\mathbf{i})\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(\mathbf{i}) \quad | \quad \mathbf{b}(\mathbf{i})\,)$, quindi $\mathbf{A}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{i})$ è equivalente a $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}(\mathbf{i})$ è libera, $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}(\mathbf{i})$ sono dominanti, $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$ ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$ (e quindi di $\mathbf{A}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{i})$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha \notin \{i, -i\} \qquad (\,\mathbf{C}(\alpha) | \quad \mathbf{d}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-i})}$

$\begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = (\, \mathbf{D}(\alpha) | \quad \mathbf{e}(\alpha) \,)$ è una forma ridotta di Gauss per $(\, \mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha) \,)$.

Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

SVOLGIMENTO ESERCITAZIONI* 3

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & 7+i \\ 3-i & 1 \end{pmatrix}$. Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$.

Ricordando che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{se} \qquad ad-bc \neq 0,$$

si ha:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{i-(7+i)(3-i)}\begin{pmatrix} 1 & -2-i \\ -7i & i \end{pmatrix} = \frac{1}{i-(21+3i-7i+1)}\begin{pmatrix} 1 & -7-i \\ -3+i & i \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{-22+5i}\begin{pmatrix} 1 & -7-i \\ -3+i & i \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\frac{1}{-22+5i} = \frac{1}{-22+5i} \times \frac{\overline{-22+5i}}{\overline{-22+5i}} = \frac{-22-5i}{(-22+5i)(-22-5i)} = \frac{-22-5i}{22^2-5^2i^2} =$$

$$= \frac{-22-5i}{484+25} = \frac{-22-5i}{509} = -\frac{22}{509} - i\frac{5}{509},$$

allora

$$\mathbf{A}^{-1} = (-\frac{22}{509} - i\frac{5}{509})\begin{pmatrix} 1 & -7-i \\ -3+i & i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha-i & \alpha-i \\ -2i & \alpha \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

Ricordando che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se $ad-bc \neq 0$ ed in tal caso si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare se e solo se

$$(\alpha-i)\alpha - (\alpha-i)(-2i) = (\alpha-i)(\alpha+2i) \neq 0,$$

ossia se e solo se $\alpha \notin \{-2i, i\}$, ed in tal caso si ha:

$$\mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \frac{1}{(\alpha-i)(\alpha+2i)}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha+i \\ 2i & \alpha-i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$$(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-\alpha)E_1(\frac{1}{\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 0 : \mathbf{A}(0) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{1-\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 1 : \mathbf{A}(1) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} & -\frac{1}{1-\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-\frac{1}{\alpha})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} & \frac{-2\alpha+1}{2\alpha(1-\alpha)} & -\frac{1}{2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \end{array}\right) =$$

$$= (I_3 \quad | \quad \mathbf{A}(\alpha)^{-1}).$$

Se $\boxed{\alpha \notin \{0,1\}}$ $\qquad \mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha+1 & -1+\alpha \\ \alpha & -\alpha & \alpha(1-\alpha) \\ -2\alpha & 2\alpha & 0 \end{pmatrix}.$

$\boxed{4}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di $\mathbf{A}$ è una matrice 3×2 $\mathbf{R}$ tale che se $\mathbf{R} = (\, \mathbf{c}_1 \quad | \quad \mathbf{c}_2\,)$, allora

$\mathbf{c}_1$ è soluzione di (1) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{c}_2$ è soluzione di (2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$(\, \mathbf{A} \quad | \quad \mathbf{I}_2\,) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & | & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\xrightarrow{E_2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} = (\, \mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2\,).$$

(1) è equivalente a (1′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad = \frac{1}{2} \\ x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 6x_3 + 1 = 6h + 1 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(6h+1) + \dfrac{1}{2} = -3h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h \\ 6h+1 \\ h \end{pmatrix} |h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad = 0 \\ x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = 6x_3 - 2 = 6k - 2 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 = -\dfrac{1}{2}(6k-2) = -3k + 1 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3k+1 \\ 6k-2 \\ k \end{pmatrix} |k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\mathbf{R(h,k)} = \begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$, al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

$\boxed{5}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Poniamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$.

2. Cerchiamo tutte le inverse destre di $\mathbf{B}$. Dall'esercizio $\boxed{4}$ sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$ con $h, k \in \mathbb{C}$.

3. Una matrice è inversa sinistra di $\mathbf{A}$ se e solo se è la trasposta di una inversa destra di $\mathbf{B}$. Quindi le inverse sinistre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -3h & 6h+1 & h \\ -3k+1 & 6k-2 & k \end{pmatrix}$ al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

$\boxed{6}$ Sia $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$ l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n. Si provi che W è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine n.

(i) $\quad \mathbf{O}_{n\times n} \in W$: $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}$

(ii) $\quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\[2ex] \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\[4ex] \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \\[2ex] \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W$$

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\[2ex] \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha\mathbf{A} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \alpha\mathbf{A} \in W$$

$\boxed{7}$ Sia $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A}^H = -\mathbf{A}\}$ l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n. Si provi che W non è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine n.

(*i*) $\mathbf{O}_{n\times n} \in W$: $\mathbf{O}^H = \mathbf{O} = -\mathbf{O}$

(*ii*) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W \overset{?}{\Longrightarrow} \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\[1em] \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\[2em] \left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \\[1em] \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B}^H = -\mathbf{B}\end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H = -\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = -(\mathbf{A}+\mathbf{B})\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$$

(*iii*) $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^H = \overline{\alpha}\mathbf{A}^H = \overline{\alpha}(-\mathbf{A}) = -\overline{\alpha}\mathbf{A}$$

Non è vero che $\alpha\mathbf{A} \in W$ **per ogni scalare** α **ed ogni** $\mathbf{A} \in W$:

prendendo $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ si ottiene che

$$\overline{\alpha}\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} \quad \underset{\uparrow \atop \boxed{\text{poichè } \mathbf{A} \neq \mathbf{O}}}{\iff} \quad \overline{\alpha} = \alpha \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

Quindi se $\mathbf{O} \neq \mathbf{A} \in W$ e $\alpha \notin \mathbb{R}$ (ad esempio se $\mathbf{A}$ è la matrice $n \times n$ con 1 al posto $(1, n)$, -1 al posto $(n, 1)$ e 0 altrove, ed $\alpha = i$) allora $\alpha\mathbf{A} \notin W$.

Dunque W non è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{8}$ Sia $V = \mathbb{R}^3$ (spazio vettoriale reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$$\mathrm{S}_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}; \mathrm{S}_2 = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}; \mathrm{S}_3 = \left\{\begin{pmatrix}a\\0\\b\end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\right\}; \mathrm{S}_4 = \left\{\begin{pmatrix}a-2\\0\\b\end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\right\};$$

$$\mathrm{S}_5 = \left\{\begin{pmatrix}a\\a-b\\0\end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\right\}; \mathrm{S}_6 = \left\{\begin{pmatrix}a-2\\0\\a+1\end{pmatrix} | a \in \mathbb{R}\right\}; \mathrm{S}_7 = \left\{\begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix} | a \in \mathbb{R}\right\}.$$

• S_1 è un sottospazio vettoriale di V: l'unico elemento di S_1 è il vettore $\mathbf{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, e $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathrm{S}_1$ e $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathrm{S}_1$ per ogni scalare α (S_1 è il sottospazio nullo di $\mathbb{R}^3$).

• S_2 non è un sottospazio di V: contiene $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ma non contiene $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_2$ (d'altra parte nessun sottoinsieme **finito** di uno spazio vettoriale W che contenga un elemento non nullo $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ può essere un sottospazio di W: se U è un sottospazio di W che contiene $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, allora U deve contenere l'insieme **infinito** di vettori $\{\alpha\mathbf{w} | \alpha \text{ scalare }\}$, per cui U stesso deve essere infinito).

• Per vedere se S_3 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in S_3$

(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S_3$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_3$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in S_3$ per ogni $\mathbf{u} \in S_3$ ed ogni scalare α.

Poichè gli elementi di S_3 sono esattamente i vettori di $\mathbb{R}^3$ che hanno la seconda coordinata nulla, allora $\mathbf{0} \in S_3$, inoltre dal fatto che la somma di due vettori di $\mathbb{R}^3$ con la seconda coordinata nulla è un vettore di $\mathbb{R}^3$ con la seconda coordinata nulla si ha (ii), e dal fatto che il prodotto di un vettore di $\mathbb{R}^3$ con la seconda coordinata nulla per uno scalare è un vettore di $\mathbb{R}^3$ con la seconda coordinata nulla segue (iii). In simboli:

(i) $\mathbf{0} \in S_3$

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_3$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_3, b_3 \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1 + a_2$ e $b_3 = b_1 + b_2$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in S_3$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in S_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c, d \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ 0 \\ \alpha b \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a$ e $d = \alpha b$.

Dunque S_3 è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_4 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in S_4$

(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S_4$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_4$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in S_4$ per ogni $\mathbf{u} \in S_4$ ed ogni scalare α.

(i) esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$: si prenda $a = 2$ e $b = 0$, quindi $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_4$

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_4$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 - 2 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{S}_4 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_3, b_3 \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 - 2 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 - 2 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 - 4 \\ 0 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1 + a_2 - 2$ e $b_3 = b_1 + b_2$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c, d \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c-2 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - 2\alpha \\ 0 \\ \alpha b \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a - 2\alpha + 2$ e $d = \alpha b$.

Dunque S_4 è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_5 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_5$

(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{S}_5$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_5$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_5$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_5$ ed ogni scalare α.

(i) esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a-b \\ 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a = b = 0$, quindi $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_5$

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_5$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 - b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 - b_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{S}_5 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_3, b_3 \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3 - b_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1-b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2-b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ (a_1+a_2)-(b_1+b_2) \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1+a_2$ e $b_3 = b_1+b_2$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_5$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ a-b \\ 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_5 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c, d \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ c-d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ a-b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha a - \alpha b \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a$ e $d = \alpha b$.

Dunque S_5 è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_6 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_6$

(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_6$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_6$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_6$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_6$ ed ogni scalare α.

(i) Perchè $\mathbf{0}$ appartenga a S_6 occorre che esista $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ a+1 \end{pmatrix}$. Poichè il sistema

$$\begin{cases} a-2=0 \\ \\ a+1=0 \end{cases}$$

nell'incognita a non ha soluzioni, allora S_6 non è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_7 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_7$

(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_7$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_7$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_7$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_7$ ed ogni scalare α.

(i) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$: si prenda $a = 0$. Quindi $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_7$.

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_7$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_7 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ c \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a+b \\ a+b \end{pmatrix}$, basta prendere $c = a+b$.

(*iii*) Se $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_7$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_7 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad b \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha a \\ \alpha a \end{pmatrix}$, basta prendere $b = \alpha a$.

Dunque S_7 è un sottospazio di V.

SVOLGIMENTO ESERCITAZIONI* 4

$\boxed{1}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2.

1. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$.

2. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(b)** $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(c)** $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

1. $\boxed{1^0 \text{ MODO}}$ (i) $\mathbf{O}_{2\times 2} \in W$: $\mathbf{O}_{2\times 2} \in M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbf{O}_{2\times 2}^T = \mathbf{O}_{2\times 2} = -\mathbf{O}_{2\times 2}$

(ii)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} = -\mathbf{B}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = -\mathbf{A} - \mathbf{B} = -(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$$

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha(-\mathbf{A}) = -\alpha\mathbf{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in W$$

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$

(i) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a = 0$.

(ii) Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c \in \mathbb{R} | \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $c = a + b$.

(iii) Se $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{A} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad b \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ -\alpha a & 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $b = \alpha a$.

Dunque W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

2. (a) Dal momento che ogni elemento di $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un elemento di W, per stabilire se $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è o non è un insieme di generatori di W, spazio vettoriale **reale**, occorre stabilire se **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esistono** α_1 ed α_2 numeri **reali** tali che

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $A \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, il problema diventa stabilire se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema

$$(*) \quad \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = a \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = -a \end{cases}$$

nelle incognite **reali** α_1, α_2 ha soluzione. $(*)$ è equivalente all'unica equazione

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = -a$$

che ha soluzioni per ogni $a \in \mathbb{R}$ (si prendano ad esempio $\alpha_2 = 0$ ed $\alpha_1 = -a$), allora l'insieme di vettori $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

(b) Poichè $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$, allora $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ non è un insieme di generatori per W.

(c) Dal momento che $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in W$, per stabilire se $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è o non è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale **reale** occorre stabilire se **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste** $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ -3\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $A \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, il problema diventa stabilire se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema

$$(**) \quad \begin{cases} 3\alpha = a \\ -3\alpha = -a \end{cases}$$

nell' incognita **reale** α ha soluzione. Poichè $(**)$ ha soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$ ($\alpha = a/3$), allora $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

$\boxed{2}$ Si dica se $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Per stabilire se $\mathcal{S}$ è o non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ occorre stabilire se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 == \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 \end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ -1 & -4 & 2 & b \\ 2 & 8 & -4 & c \end{array}\right) \xrightarrow[E_{31}(-2)E_{21}(1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & -1 & 3 & a+b \\ 0 & 2 & -6 & c-2a \end{array}\right) \xrightarrow[E_{32}(-2)E_2(-1)]{}$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & -3 & -a-b \\ 0 & 0 & 0 & 2b+c \end{array}\right).$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $2b + c \neq 0$ (si prendano ad esempio $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $(*)$ non ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, per cui $\mathcal{S}$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{3}$ Siano V uno spazio vettoriale complesso ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ un insieme di generatori di V. Si provi che anche $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\}$ è un insieme di generatori di V.

Per definizione di sottospazio generato da un insieme di vettori di V, si ha:

(1) $\quad\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2 \rangle = \{\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$

(2) $\quad\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle = \{\delta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \gamma(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) | \delta, \gamma \in \mathbb{C}\} = \{(\delta + \gamma)\mathbf{v}_1 + (\delta - \gamma)\mathbf{v}_2 | \delta, \gamma \in \mathbb{C}\}$.

Se $\mathbf{z} \in \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle$, per (2) esistono $\delta, \gamma \in \mathbb{C}$ tali che $\mathbf{z} = (\delta + \gamma)\mathbf{v}_1 + (\delta - \gamma)\mathbf{v}_2$. Ponendo $\alpha = \delta + \gamma$ e $\beta = \delta - \gamma$ si ha allora $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$, e per (1) $\mathbf{z} \in \langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2 \rangle$.

Questo prova che $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle$ è contenuto in $\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2 \rangle$.

Viceversa, se $\mathbf{z} \in \langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2 \rangle$, per (1) esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tali che $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$. Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} \delta + \gamma = \alpha \\ \delta - \gamma = \beta \end{cases}$$

nelle incognite δ e γ, si ottiene

$$\begin{cases} \delta = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \gamma = \frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

Quindi per (2)

$$\mathbf{z} = \frac{\alpha + \beta}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \frac{\alpha - \beta}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \in langle\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\rangle.$$

Questo prova che $\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2 \rangle$ è contenuto in $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle$.

Concludendo, $\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle$.

Dal momento che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di V, allora $V = \langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2 \rangle$. Dunque anche $V = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle$, ossia anche $\mathcal{S}_1$ è un insieme di generatori di V.

$\boxed{4}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \right\}.$$

(1) Il problema è stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix},$$

allora $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se

$$(*) \qquad \begin{cases} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Il problema diventa quindi stabilire se il sistema $(*)$ (nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) abbia un'unica soluzione (e quindi la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), oppure no. La matrice aumentata di $(*)$ è: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 4 & 6 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 4 & 6 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}\,).$$

Poichè **non tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(*)$ ha ∞ soluzioni. In particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, e quindi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è **linearmente dipendente** (ad esempio, poichè $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases} \alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

prendendo $\alpha_3 = 1$ con la sostituzione all'indietro si ottiene $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ ed $\alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, ossia $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di $(*)$ e $\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ con coefficienti non tutti nulli).

$$(2)\quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2+\alpha_3\mathbf{w}_3 = \alpha_1\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_2+\alpha_3\\4\alpha_1-\alpha_3\\2\alpha_2+\alpha_3\end{pmatrix}$$

$$\iff \qquad (*) \qquad \begin{cases}\alpha_2+\alpha_3=0\\4\alpha_1-\alpha_3=0\\2\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\4&0&-1&0\\0&2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/4&0\\0&1&1&0\\0&2&1&0\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/4&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_3(-1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/4&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)=(\mathbf{U}\mid\mathbf{0}).$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(*)$ ha come unica soluzione la soluzione nulla $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, ossia

$$\alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2+\alpha_3\mathbf{w}_3=\mathbf{0} \implies \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.$$

Quindi $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\}$ è **linearmente indipendente**.

$\boxed{5}$ Siano V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S}=\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di V. Si dica quale dei seguenti insiemi di vettori di V è linearmente indipendente:

$$(1)\quad \mathcal{S}_1=\{\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3\},$$
$$(2)\quad \mathcal{S}_2=\{\mathbf{v}_1-2\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_3\}.$$

(1)

$$\underline{0}=\alpha(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)+\beta(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3)+\delta(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)=(\beta+\delta)\mathbf{v}_1+(\alpha+\delta)\mathbf{v}_2+(\alpha+\beta+\delta)\mathbf{v}_3$$

$$\underset{\boxed{\text{poichè } \mathcal{S} \text{ è L.I.}}}{\overset{}{\iff}} \qquad (*) \qquad \begin{cases}\beta+\delta=0\\\alpha+\delta=0\\\alpha+\beta+\delta=0\end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_{12}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\1&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_{31}(-1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&1&0&0\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_3(-1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)=(\mathbf{U}\mid\mathbf{0}).$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, l'unica soluzione di $(*)$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi $\mathcal{S}_1$ è **linearmente indipendente**.

$$(2) \quad \underline{0} = \alpha(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \delta(\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) = (\alpha+\beta)\mathbf{v}_1 + (\beta+\delta)\mathbf{v}_2 + (-2\alpha+2\delta)\mathbf{v}_3$$

$$\underset{\boxed{\text{poichè } \mathcal{S} \text{ è L.I.}}}{\Longleftrightarrow} \qquad (*) \quad \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \beta+\delta=0 \\ -2\alpha+2\delta=0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\,\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}\,).$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha una colonna non dominante, $(*)$ ha ∞ soluzioni, in particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, quindi $\mathcal{S}_2$ è **linearmente dipendente**.

$\boxed{6}$ Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta nel seguente insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{1^0 \text{ MODO}}$

1^0 **passaggio**. Esistono in $\mathcal{S}$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}$?

$\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_5,$$

per cui togliamo subito $\mathbf{v}_4$ (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di $\mathcal{S}$ che siano nulli**), **e poniamo**

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_1$ è ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Esistono in $\mathcal{S}_1$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_1$? Poichè

$$\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_1 = -3\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_5$$

ma anche

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{3}\mathbf{v}_2 = -\frac{1}{3}\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_5$$

possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{v}_1$, oppure possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{v}_2$, ottenendo ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Dunque, **guardiamo se tra i vettori di $\mathcal{S}_1$ ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno di due vettori**. In questo caso abbiamo individuato la coppia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e scegliamo di togliere $\mathbf{v}_2$.

Poniamo

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Esistono in $\mathcal{S}_2$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$?

Prendiamo una combinazione lineare nulla degli elementi di $\mathcal{S}_2$:

$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_3 + \delta\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}.$$

Se dovesse risultare che allora $\alpha = \beta = \delta = 0$, $\mathcal{S}_2$ sarebbe L.I. e quindi una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$. Da

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo il sistema lineare, nelle incognite α, β, δ

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ -\alpha = 0 \\ \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(1/2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \beta + \frac{1}{2}\delta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione quella nulla, per cui $\mathcal{S}_2$ è una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$ Invece di togliere successivamente vettori che siano combinazioni lineari di quelli rimasti, ossia invece di "restringere"insiemi di generatori, si puó "allargare"insiemi L.I.

Ad esempio:

1. $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ per cui $\{\mathbf{v}_1\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{v}_1$. Chiamiamo $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$.

2. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{v}_2$. Chiamiamo $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \setminus \{\mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4; \mathbf{v}_5\}$.

3. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{v}_3$. Chiamiamo $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2$.

4. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{v}_4$. Chiamiamo $\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_3 \setminus \{\mathbf{v}_4\} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_5\}$.

5. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_5\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{v}_5$. Chiamiamo $\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_4$.

Dunque $\mathcal{S}_5 = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_5\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{7}$ Sia W l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche. L'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

è un insieme di generatori di W. Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{1^0 \text{ MODO}}$ "Restringiamo" un insieme di generatori di W.

1^0 **passaggio**. Esistono in $\mathcal{S}$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}$?

$\mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{C}_5 = \mathbf{O} = 0\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_4 + 0\mathbf{C}_6,$$

per cui togliamo subito $\mathbf{C}_5$ (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di $\mathcal{S}$ che siano nulli**), **e poniamo**

$$\mathcal{S}_1 = \left\{\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

2^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_1$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_1$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_1$? Poichè

$$\mathbf{C}_1 = 2\mathbf{C}_6 = 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_4 + 2\mathbf{C}_6$$

ma anche

$$\mathbf{C}_6 = \frac{1}{2}\mathbf{C}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_4$$

possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{C}_1$, oppure possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{C}_6$, ottenendo ancora un insieme di generatori di W. Dunque, **guardiamo se tra i vettori di $\mathcal{S}_1$ ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno di due vettori**. In questo caso abbiamo individuato la coppia $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_6$ e scegliamo di togliere $\mathbf{C}_1$.

Poniamo

$$\mathcal{S}_2 = \left\{\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

3^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_2$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_2 + \alpha_2\mathbf{C}_3 + \alpha_3\mathbf{C}_4 + \alpha_4\mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_2$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ 5h \\ -h \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (si ponga $h = 1$), si ottiene

$$-2\mathbf{C}_2 + 5\mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_6 = \mathbf{O},$$

per cui $\mathbf{C}_2$,$\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_4$ e $\mathbf{C}_6$ sono combinazioni lineari degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$ e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da eliminare da $\mathcal{S}_2$.

Scegliamo di togliere da $\mathcal{S}_2$ la matrice $\mathbf{C}_2$ (combinazione lineare degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$) e poniamo

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_3$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_3$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_3$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_3 + \alpha_2\mathbf{C}_4 + \alpha_3\mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_3$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

L'unica soluzione del sistema è quella nulla, per cui $\mathcal{S}_3$ è linearmente indipendente, ed è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$ Invece di togliere successivamente vettori che siano combinazioni lineari di quelli rimasti, ossia invece di "restringere" insiemi di generatori, si puó "allargare" insiemi L.I.

Ad esempio:

1. $\mathbf{C}_1 \neq \mathbf{0}$ per cui $\{\mathbf{C}_1\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{C}_1$. Chiamiamo $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$.

2. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{C}_2$. Chiamiamo $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1$.

3. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{C}_3$. Chiamiamo $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2$.

4. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_4\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{C}_4$. Chiamiamo $\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_3 \setminus \{\mathbf{C}_4\} = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_5; \mathbf{C}_6\}$.

5. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_5\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{C}_5$. Chiamiamo $\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_4 \setminus \{\mathbf{C}_5\} = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_6\}$.

6. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_6\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{C}_6$. Chiamiamo $\mathcal{S}_6 = \mathcal{S}_5 \setminus \{\mathbf{C}_6\} = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3\}$.

Dunque $\mathcal{S}_6 = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3\}$ è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{8}$ Qual è la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche ?

Poichè dall'esercizio precedente sappiamo che

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

è una base dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche, allora la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche è 3 (ossia il numero di elementi di una sua qualsiasi base).

SVOLGIMENTO ESERCITAZIONI* 5

$\boxed{1}$ Si dica quale delle seguenti posizioni, al variare di $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$, definisce un'applicazione lineare da $M_2(\mathbb{C})$ in $M_2(\mathbb{C})$: $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{I_2}$, $f_3(\mathbf{A}) = 2\mathbf{A}$, $f_4(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$, e quale delle seguenti posizioni, al variare di $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$, definisce un'applicazione lineare da $M_2(\mathbb{C})$ in $\mathbb{C}^2$: $g_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1}$, $g_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1} + \mathbf{e_1}$.

Fissato $i \in \{1,2,3,4\}$, per vedere che $f_i : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ è un'applicazione lineare occorre verificare che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $f_i(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = f_i(\mathbf{A}) + f_i(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A},\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

(2) $f_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha f_i(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

• f_1 verifica la condizione (1) ? Essendo

$$f_1(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T) = \mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T,$$

$f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ e $f_1(\mathbf{B}) = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$, se fosse $f_1(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = f_1(\mathbf{A}) + f_1(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A},\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$, sarebbe

$$(*) \quad \mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{B}^T = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$$

Ma $(*)$ è falsa: si prenda, ad esempio, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I_2}$. Dunque f_1 non è un'applicazione lineare.

• f_2 verifica la condizione (1) ? Essendo

$$f_2(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}+\mathbf{B} - \mathbf{I_2},$$

$f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{I_2}$ e $f_2(\mathbf{B}) = \mathbf{B} - \mathbf{I_2}$, se fosse $f_2(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = f_2(\mathbf{A}) + f_2(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A},\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$, si avrebbe

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{I_2} = \mathbf{A}-\mathbf{I_2}+\mathbf{B}-\mathbf{I_2} \quad \forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C}),$$

da cui $\mathbf{I_2} = \mathbf{O}$, che è falso. Dunque f_2 non è un'applicazione lineare.

• f_3 verifica la condizione (1) ? Sí , essendo

$$f_3(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 2(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 2\mathbf{A}+2\mathbf{B} = f_3(\mathbf{A}) + f_3(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C}).$$

f_3 verifica la condizione (2) ? Sí , essendo

$$f_3(\alpha\mathbf{A}) = 2(\alpha\mathbf{A}) = \alpha(2\mathbf{A}) = \alpha f_3(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque f_3 è un'applicazione lineare.

• f_4 verifica la condizione (1) ? Essendo

$$f_4(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}^2,$$

$f_4(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ e $f_4(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2$, se fosse $f_4(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = f_4(\mathbf{A}) + f_4(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A},\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$, sarebbe

$$(*) \quad \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$$

Ma $(*)$ è falsa: si prenda, ad esempio, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I_2}$. Dunque f_4 non è un'applicazione lineare.

Fissato $i \in \{1,2\}$, per vedere che $g_i : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ è un'applicazione lineare occorre verificare che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $g_i(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = g_i(\mathbf{A}) + g_i(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

(2) $g_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha g_i(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

• g_1 verifica la condizione (1) ? Sí , essendo

$$g_1(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{e_1} = \mathbf{A}\mathbf{e_1} + \mathbf{B}\mathbf{e_1} = g_1(\mathbf{A}) + g_1(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C}).$$

g_1 verifica la condizione (2) ? Sí , essendo

$$g_1(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{e_1} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{e_1}) = \alpha g_1(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque g_1 è un'applicazione lineare.

• g_2 verifica la condizione (1) ? Essendo

$$g_2(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{e_1} + \mathbf{e_1} = \mathbf{A}\mathbf{e_1} + \mathbf{B}\mathbf{e_1} + \mathbf{e_1},$$

$g_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1} + \mathbf{e_1}$ e $g_2(\mathbf{B}) = \mathbf{B}\mathbf{e_1} + \mathbf{e_1}$, se fosse $g_2(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = g_2(\mathbf{A}) + g_2(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$, sarebbe $\mathbf{e_1} = \mathbf{0}$ che è falso. Dunque g_2 non è un'applicazione lineare.

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice complessa 2×2 tale che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

(a) Si provi che $C(\mathbf{A}-\mathbf{I_2}) \subseteq N(\mathbf{A})$.

(b) Si provi che se inoltre $\mathbf{O} \neq \mathbf{A} \neq \mathbf{I_2}$ allora $C(\mathbf{A}-\mathbf{I_2}) = N(\mathbf{A})$.

(a) Per definizione di spazio delle colonne di $\mathbf{A}-\mathbf{I_2}$, si ha che $C(\mathbf{A}-\mathbf{I_2}) = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$, dove $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ sono la prima e la seconda colonna di $\mathbf{A}-\mathbf{I_2}$ rispettivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= (\mathbf{A}-\mathbf{I_2})\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_1 - \mathbf{I_2}\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \qquad \text{e} \\ \mathbf{w}_2 &= (\mathbf{A}-\mathbf{I_2})\mathbf{e}_2 = \mathbf{A}\mathbf{e}_2 - \mathbf{I_2}\mathbf{e}_2 = \mathbf{A}\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Poichè per $i = 1, 2$ si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i) = \mathbf{A}^2\mathbf{e}_i - \mathbf{A}\mathbf{e}_i \underset{\boxed{\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}}}{\underset{\uparrow}{=}} \mathbf{A}\mathbf{e}_i - \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{0},$$

allora, per definizione di spazio nullo di $\mathbf{A}$, si ha

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i \in N(\mathbf{A}) \text{ per } i = 1, 2,$$

e quindi $C(\mathbf{A}-\mathbf{I_2}) = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \rangle \subseteq N(\mathbf{A})$.

(b) $N(\mathbf{A})$ è un sottospazio di $\mathbb{C}^2$, essendo $\mathbf{A}$ una matrice complessa 2×2.

Da $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ segue che $N(\mathbf{A}) \neq \mathbb{C}^2$, per cui $\dim(N(\mathbf{A})) < \dim(\mathbb{C}^2) = 2$.

Da $\mathbf{A} \neq \mathbf{I_2}$ segue che $\mathbf{A}-\mathbf{I_2} \neq \mathbf{O}$, per cui $C(\mathbf{A}-\mathbf{I_2}) \neq \{\mathbf{O}\}$, e quindi $\dim(C(\mathbf{A}-\mathbf{I_2})) > 0$.

Essendo $\dim(C(\mathbf{A}-\mathbf{I_2})) \leq \dim\ (N(\mathbf{A}))$, per (a), si ottiene allora che $\dim(C(\mathbf{A}-\mathbf{I_2})) = \dim(N(\mathbf{A})) = 1$.

Dunque $C(\mathbf{A}-\mathbf{I_2})$ e $N(\mathbf{A})$ sono due sottospazi di $\mathbb{C}^2$, l'uno contenuto nell'altro, ed entrambi con la stessa dimensione. Pertanto $C(\mathbf{A}-\mathbf{I_2}) = N(\mathbf{A})$.

$\boxed{3}$ Siano $\mathbf{A}$ una matrice complessa $m \times n$ ed $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ l'applicazione lineare indotta da $\mathbf{A}$. Si provi che $f_{\mathbf{A}}$ è iniettiva se e solo se $\mathbf{A}$ ha un'inversa sinistra.

$$f_{\mathbf{A}} \quad \text{è iniettiva} \quad \underset{\boxed{f_{\mathbf{A}} \quad \text{appl. lin.}}}{\underset{\uparrow}{\iff}} \quad N(f_{\mathbf{A}}) = \{\mathbf{0}\} \quad \underset{\boxed{N(f_{\mathbf{A}}) = N(\mathbf{A})}}{\underset{\uparrow}{\iff}} \quad N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\} \iff \dim\,(N(\mathbf{A})) = 0$$

Poichè per il teorema "nullità + rango"si ha

$$\dim \mathrm{N}(\mathbf{A}) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{A}) \text{ - } \mathrm{rk}(\mathbf{A}),$$

allora

$$\dim\,(N(\mathbf{A})) = 0 \iff \text{numero delle colonne di } \mathbf{A} = \mathrm{rk}(\mathbf{A}).$$

Dunque

$$f_{\mathbf{A}} \quad \text{è iniettiva} \iff \text{numero delle colonne di } \mathbf{A} = \mathrm{rk}(\mathbf{A}) \iff \mathbf{A} \text{ ha un'inversa sinistra.}$$

$\boxed{4}$ Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A}_\alpha)$ di $\mathbf{A}_\alpha$.

Poichè $N(\mathbf{A}_\alpha) = N(\mathbf{U}_\alpha)$ per ogni forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}_\alpha$ di $\mathbf{A}_\alpha$, troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}_\alpha$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = 0$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_0$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U}_0) = \ (\text{numero delle colonne di } \mathbf{U})_0 - \ \mathrm{rk}\ (\mathbf{U}_0) = 4 - 2 = 2.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}_0) \quad \iff \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ \qquad\quad x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}_0$, ossia la 2^a e la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 & = & h \\ x_3 & = & k \\ x_4 & = & 0 \\ x_1 & = & -2x_2 - 3x_4 & = & -2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A}_0) = N(\mathbf{U}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ h \\ k \\ 0 \end{pmatrix} | h,k \in \mathbb{C} \right\}$. Ponendo:

$$\mathbf{v}_1 \underset{\boxed{\begin{matrix} h=1 \\ k=0 \end{matrix}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 \underset{\boxed{\begin{matrix} h=0 \\ k=1 \end{matrix}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

si ottiene che una base di $N(\mathbf{A}_0)$ è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \neq 0$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha})E_2(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U}_\alpha) = \text{ (numero delle colonne di } \mathbf{U})_\alpha - \text{ rk } (\mathbf{U}_\alpha) = 4 - 3 = 1.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}_\alpha) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ x_2 + x_3 + \frac{\alpha-1}{\alpha} x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}_\alpha$, ossia la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_4 = 0 \\ x_2 = -x_3 - \frac{\alpha-1}{\alpha} x_4 = -h \\ x_1 = -2x_2 - 3x_4 = 2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A}_\alpha) = N(\mathbf{U}_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} 2h \\ -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}$. Ponendo: $\mathbf{v}_1 \underset{\boxed{h=1}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, si ottiene che una base di $N(\mathbf{A}_\alpha)$ è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{5}$ Sia $\quad \mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{24}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-\alpha)E_{32}(-\alpha+1)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)\alpha & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = 1$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1$$

$\text{rk}(A_1) = 3$

Una base $\mathcal{B}_1$ di $C(\mathbf{A}_1)$ è $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_1$ di $R(\mathbf{A}_1)$ è $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = \frac{3}{2}$

$$\mathbf{B}_{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2i})E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\frac{3}{2}}$$

$\text{rk}(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}}) = 3$

Una base $\mathcal{B}_{\frac{3}{2}}$ di $C(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$ è $\mathcal{B}_{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_{\frac{3}{2}}$ di $R(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$ è $\mathcal{D}_{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{3^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \notin \{1, \frac{3}{2}\}$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)\alpha & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}((2\alpha-3)\alpha)E_3(\frac{1}{-(2\alpha-3)(\alpha-1)})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2i})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

$\text{rk}(A_\alpha) = 4$

Una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ è $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha-1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4\alpha-6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$ è $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\overline{\alpha}-3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{6}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

(a) Per provare che f è un'applicazione lineare occorre provare :

1. $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) \underset{?}{=} f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix})$
   per ogni $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$
2. $f(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \underset{?}{=} \alpha f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ per ogni $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$

1.
$$f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. somma vettori colonna}}}}{=} f(\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. f}}}}{=}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1+a_2 & (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ (a_1+a_2)-(b_1+b_2) & b_1+b_2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{propr. assoc. e commut. di + in } \mathbb{R}}}}{=}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1+a_2 & (a_1+b_1)+(a_2+b_2) \\ (a_1-b_1)+(a_2-b_2) & b_1+b_2 \end{pmatrix} =$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. somma matrici}}}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & a_1+b_1 \\ a_1-b_1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & a_2+b_2 \\ a_2-b_2 & b_2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. f}}}}{=} f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix})$$

2.
$$f(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. prod. di uno scal. per un vett.}}}}{=} f(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. f}}}}{=} \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha a+\alpha b \\ \alpha a-\alpha b & \alpha b \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{propr. distr. in } \mathbb{R}}}}{=}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha(a+b) \\ \alpha(a-b) & \alpha b \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. prod. di uno scal. per una matrice}}}}{=} \alpha \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. f}}}}{=} \alpha f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$$

(*b*) La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})) \end{pmatrix}.$$
Dalla definizione di f si ottiene:
$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$
quindi $A = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}$.

Calcoliamo le coordinate rispetto alla base ordinata $\mathcal{D}$ di un generico elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma & \alpha+\beta \\ \beta+\delta & \beta \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2\gamma &= a \\ \alpha+\beta &= b \\ \beta+\delta &= c \\ \beta &= d \end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} \beta &= d \\ \gamma &= a/2 \\ \alpha = b-\beta = b-d \\ \delta = c-\beta = c-d \end{cases}$, quindi

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b-d \\ d \\ c-d \\ a/2 \end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, otteniamo

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è quindi la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{7}$ Siano

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Si provi che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$.

(2) Si calcolino le matrici di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ e $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

(1) Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le matrici che hanno come colonne gli elementi di $\mathcal{B}$ e di $\mathcal{B}'$ rispettivamente.

Occorre provare che entrambe hanno rango uguale a 3.

Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

per cui rk($\mathbf{A}$)=rk($\mathbf{U}$) = 3, ed, analogamente, facendo una E.G. su $\mathbf{A}'$ si ottiene:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}'$$

per cui rk($\mathbf{A}'$)=rk($\mathbf{U}'$) $= 3$.

(2) La matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = (\,C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_1') \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_2') \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_3')\,) = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix})\end{pmatrix}.$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\delta\end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\delta\end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix}\alpha+2\beta+\delta\\\alpha+\beta+\delta\\\beta+\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

ossia α, β e δ sono soluzioni del sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha+2\beta+\delta = a \\ \alpha+\beta+\delta = b \\ \beta+\delta = c \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla matrice aumentata di $(*)$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 1 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 0 & -1 & 0 & | & b-a \\ 0 & 1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & | & a-b \\ 0 & 0 & 1 & | & c-a+b \end{pmatrix}$$

da cui, con la sostituzione all'indietro,

$$\begin{cases} \delta = c-a+b \\ \beta = a-b \\ \alpha = -2\beta-\delta+a = -2a+2b-c+a-b+a = b-c \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}b-c\\a-b\\c-a+b\end{pmatrix}$, per cui $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, e quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{pmatrix},$$

ma dal momento che $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}^{-1}$, calcoliamo $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ usando l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$(\,\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \quad | \quad \mathbf{I}_3\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(3/2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{E_{23}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right).$$

Dunque $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

SVOLGIMENTO ESERCITAZIONI* 6

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}'_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D}' = \left\{ \mathbf{w}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{D}'$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \quad \text{dove } \mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} \text{ è la matrice di passaggio da } \mathcal{D}' \text{ a } \mathcal{D} \text{ e } \mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \text{ è la matrice di passaggio da } \mathcal{B}' \text{ a } \mathcal{B}.$$

$\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}$ è stata calcolata nell'esercizio precedente:

$$\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}'\leftarrow\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = (\, C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_1) \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_2)\,)$, calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di un generico $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-\beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = a \\ \alpha + \beta = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha = a+b \\ 2\beta = b-a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = (a+b)/2 \\ \beta = (b-a)/2 \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ (b-a)/2 \end{pmatrix}$.

In particolare, specializzando a $\mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}'_2$ otteniamo

$$C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_1) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{matrix} a=4 \\ b=0 \end{matrix}}}}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_2) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{matrix} a=3 \\ b=5 \end{matrix}}}}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $\mathbf{A}'$ che cerchiamo è quindi

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 18 \\ -4 & -3 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Si verifichi che $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = |2a-b| + |a+c| + |ib|$ è una norma.

(1) $\phi(\mathbf{0}) = \phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = |2 \times 0 - 0| + |0+0| + |i0| = 0.$

Poichè $\phi(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$, per provare che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) > 0$$

basta provare che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) \neq 0,$$

ossia basta provare che

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dalla definizione di ϕ si ottiene:

$$\left.\begin{array}{rcl} \phi(\mathbf{x}) & = & 0 \\ \mathbf{x} & = & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} |2a-b| & = & 0 \\ |a+c| & = & 0 \\ |ib| & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & b/2 \\ c & = & -a \quad = \quad -b/2 \\ ib & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow a=b=c=0 \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(2) $\phi(\alpha\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix}) = |2\alpha a - \alpha b| + |\alpha a + \alpha c| + |i\alpha b| =$

$$= |\alpha||2a-b| + |\alpha||a+c| + |\alpha||ib| = |\alpha|(|2a-b| + |a+c| + |ib|) = |\alpha|\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}).$$

(3) $\phi(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{pmatrix}) =$

$$= |2(a_1+a_2) - (b_1+b_2)| + |(a_1+a_2) + (c_1+c_2)| + |i(b_1+b_2)| =$$

$$= |(2a_1 - b_1) + (2a_2 - b_2)| + |(a_1+c_1) + (a_2+c_2)| + |ib_1 + ib_2| \leq$$

$$\leq |2a_1 - b_1| + |2a_2 - b_2| + |a_1+c_1| + |a_2+c_2| + |ib_1| + |ib_2| = \phi(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}) + \phi(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}).$$

$\boxed{3}$ Sia $V = M_2(\mathbb{C})$. Si verifichi che $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ definito da

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i$$

è un prodotto interno.

(1) $\overline{(\mathbf{v}|\mathbf{u})} \stackrel{?}{=} (\mathbf{u}|\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in V$

$$\overline{\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } (\cdot|\cdot)}}{=} \overline{\sum_{i=1}^4 \overline{b_i} a_i} = \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} b_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } (\cdot|\cdot)}}{=} \overline{\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right)}.$$

(2) $(\mathbf{u}|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{z}) \stackrel{?}{=} \alpha(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}|\mathbf{z})$ $\forall \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$(\mathbf{u}|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{z}) = \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \alpha \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 \\ \alpha b_3 + \beta c_3 & \alpha b_4 + \beta c_4 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^4 \overline{a_i}(\alpha b_i + \beta c_i) = \alpha\left(\sum_{i=1}^4 \overline{a_i} b_i\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^4 \overline{a_i} c_i\right) =$$

$$= \alpha\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) + \beta\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}\right) = \alpha(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}|\mathbf{z})$$

(3) $(\bullet)$ $(\mathbf{0}|\mathbf{0}) \stackrel{?}{=} 0$

$(\bullet\bullet)$ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \stackrel{?}{\Longrightarrow} \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}_{>0}$

$(\bullet)$ $(\mathbf{0}|\mathbf{0}) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 4 \times \overline{0} \times 0 = 0$

$(\bullet\bullet)$ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} a_i = \sum_{i=1}^4 |a_i|^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}_{>0}$

$\boxed{4}$ Sia $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norma indotta dal prodotto interno $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definito nell'esercizio precedente. Si calcoli $\left\| \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -2+3i \end{pmatrix} \right\|$.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -2+3i \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -2+3i \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -2+3i \end{pmatrix} \right)} =$$

$$= \sqrt{\overline{1} \times 1 + \overline{i} \times i + \overline{1+i} \times (1+i) + \overline{-2+3i} \times (-2+3i)} =$$

$$= \sqrt{1 \times 1 - i \times i + (1-i)(1+i) + (-2-3i)(-2+3i)} =$$

$$= \sqrt{1 + 1 + 1^2 - i^2 + (-2)^2 - (-3i)^2} =$$

$$= \sqrt{1+1+1+1+4+9} = \sqrt{17}$$

$\boxed{5}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{C}^4$

$$V = \langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

$\boxed{I}$ Costruiamo dapprima **una base di V**: poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4)$.

$$\mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4) = \begin{pmatrix} i & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ i & -1 & 1 & 2i \\ -1 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(1)E_{31}(-i)E_{21}(1)E_1(-i)]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(-\frac{1}{2}i)E_{42}(i)E_2(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a, la 3^a e la 4^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = V$ è $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_3; \mathbf{w}_4\}$.

$\boxed{II}$ Troviamo **una base ortogonale di V** applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = -\frac{2i}{4} = -\frac{1}{2}i$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}i\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}i \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{v}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = i$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}i\mathbf{u}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}i\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di V.

$\boxed{III}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{II}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{II}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ed $\mathbf{u}_3$:

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{u}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)} = \sqrt{\begin{pmatrix} i & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}; \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2}\} = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di V.

$\boxed{6}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{I}$ Troviamo una base ortonormale di U.

Poniamo $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = (\,\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3\,)$.

$$\mathbf{A} = (\,\underline{w}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \underline{w}_3\,) = \begin{pmatrix} 1 & 8i & 7i \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1)E_1(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(-1)E_{32}(i)E_2(-\frac{1}{8})]{} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a e la 2^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = U$ è $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2\}$.

Applichiamo ora l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ per trovare una base ortogonale di U.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_2 = (\,-i \quad 1 \quad 0 \quad 0\,)\begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = (-i)8i = 8$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = (\,-i \quad 1 \quad 0 \quad 0\,)\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-i)i + 1 = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - 4\mathbf{u}_1 =$$
$$= \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di U.

Costruiamo base ortonormale di U normalizzando la base ortogonale $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\}$, ossia dividendo ciascun suo elemento per la sua norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$:

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}$$
$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{\begin{pmatrix} -4i & -4 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{16+16+1+1} = \sqrt{34}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di U.

La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ su U è

$$P_U(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_2^*$$

dove

$$(\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*)^H\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}((-i)2i - 6) = -\frac{4}{\sqrt{2}}$$
$$(\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_2^*)^H\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -4i & -4 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{34}}(-4i2i - 4(-6) + i8i + 10) = \sqrt{34}$$

Quindi

$$P_U(\mathbf{v}) = -\frac{4}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1^* + \sqrt{34}\mathbf{u}_2^* = -\frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{34}\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SVOLGIMENTO ESERCITAZIONI* 7

$\boxed{1}$ Si trovi una base di $V^\perp$ nei seguenti casi:

$$V = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \rangle, \qquad V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(a) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ allora $C(\mathbf{A}) = V$ e $V^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1(i)]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{U}$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{U})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 3 - 1 = 2,$$

una base di $V^\perp$ ha 2 elementi (d'altra parte dim$V$=1 e dim$\mathbb{C}^3$=3, per cui a priori potevamo dedurre che dim$V^\perp$ = dim$\mathbb{C}^3$ − dim$V = 3 - 1 = 2$).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 + 2ix_3 = 0$$

quindi $N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ -2ik \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

Una base di $V^\perp$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora $C(\mathbf{A}) = V$ e $V^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ -i & -1 & -i & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-1)E_{21}(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(-1)E_2(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{A})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 4 - 2 = 2,$$

una base di $V^\perp$ ha 2 elementi.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 - ix_4 & = & 0 \\ \\ x_2 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Quindi $V^\perp = N(\mathbf{A}^H) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ -k \\ h \\ k \end{pmatrix} |h, k \in \mathbb{C} \right\}$ ed una sua base è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{2}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Conviene sviluppare Det($\mathbf{A}$) rispetto alla riga o alla colonna che contengono piú zeri. In questo caso conviene svilupparlo ripetto alla 1^a riga oppure alla 3^a colonna. Facciamolo in entrambi i modi, per esercizio.

Rispetto alla 1^a riga:

$$\begin{aligned} \text{Det}\mathbf{A} &= (1-i)(-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (1-i)(1+i-3) - (2-3i) = (1-i)(-2+i) - 2 + 3i = \\ &= -2 + 2i + i - i^2 - 2 + 3i = -3 + 6i \end{aligned}$$

Rispetto alla 3^a colonna:

$$\begin{aligned} \text{Det}\mathbf{A} &= 3(-1)^{2+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} = \\ &= -3(1-i-i) + ((1-i)(1+i) - 2) = \\ &= -3(1-2i) + 1^2 - i^2 - 2 = -3 + 6i \end{aligned}$$

Sviluppiamo Det($\mathbf{B}$), ad esempio rispetto alla 1^a colonna:

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & 2 & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + i(-1)^{2+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + (-1)^{3+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 2i - 1 - i((1+i)i - 1) + 1 + i - 2 = 2i - 1 - i(i-2) + i - 1 = -1 + 5i$$

Infine sviluppiamo $\mathrm{Det}(\mathbf{C})$ ad esempio rispetto alla 3^a riga:

$$\mathrm{Det}\mathbf{C} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il primo addendo rispetto alla 2^a colonna, mentre il secondo ed il terzo addendo rispetto alla 1^a riga.

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} =$$
$$= -(1-1-i) - 2(1+i-1) = -i$$
$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= -(1-2(1+i)) + 2 = -(1-2-2i) + 2 = 1 + 2i + 2 = 3 + 2i$$
$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= -(1-2(1+i)) + (1-2) + = -(1-2-2i) - 1 = 2i$$

Quindi

$$\mathrm{Det}(\mathbf{C}) = -i - (3+2i) + 2i = -i - 3 - 2i + 2i = -3 - i.$$