Analisi 1 sett. Informazione, canale 5, AA 2016–17

Docente: Paolo Guiotto

Esempi di Temi di Prova Orale

Avvertenza: le seguenti tracce hanno valore puramente indicativo su come sarà strutturata la parte scritta della prova orale. Di domande se ne possono fare moltissime e quindi le seguenti non hanno alcun valore esaustivo. La struttura sarà comunque la stessa: una definizione con applicazione della stessa; una dimostrazione di un risultato noto; una domanda più aperta. In qualsiasi caso è richiesto un ragionamento e le domande non sono mai volutamente troppo precise perché si vuole che il/la candidato/a rifletta sul senso di ciò che gli/le è richiesto.

Traccia 1

Domanda 1. Si dia la definizione di *estremo superiore* di un insieme S di numeri reali. Si applichi il concetto per dimostrare che

$$\sup\left\{\frac{1}{2^n+3}\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}=\frac{1}{3}.$$

Domanda 2. Cos'è un *punto stazionario* per una funzione f? È vero che *punto stazionario* e *punto estremante* sono sinonimi per una funzione f derivabile? Enunciare e dimostrare con un risultato preciso ciò che è vero, confutare con controesempi ciò che è falso.

Domanda 3. Una funzione ha derivata $n-$esima identicamente nulla su $\mathbb{R}$, cioè $f^{(n)}(x)=0$ per ogni x. Cosa si può concludere su f?

Traccia 2

Domanda 1. Si dia la definizione di *derivata* di una funzione in un punto x_0. Usando la definizione, stabilire se la funzione $f(x)=x|x|$ è derivabile in $x_0=0$.

Domanda 2. Cosa vuol dire che una *serie numerica* $\sum_n a_n$ è *convergente*, *divergente*, *indeterminata*? Se $a_n\geqslant 0$ per ogni n allora una di queste alternative non può verificarsi. Enunciare e dimostrare un risultato preciso in tal senso.

Domanda 3. Si sa che $\lim_n a_n=3$. Quale delle seguenti affermazioni è vera e quale falsa? Per quelle vere giustificare la risposta, per quelle ritenute false esibire un contro-esempio.

i) $a_n\geqslant 2$ per ogni $n\in\mathbb{N}$.

ii) $a_n\leqslant 3-\frac{1}{n}$ definitivamente.

iii) esiste K tale che $a_n \geqslant K$ per ogni n.

Traccia 3

Domanda 1. Si dia la definizione di *limite infinito per una successione* numerica reale (a_n). Si illustri il concetto dimostrando che

$$\lim_{n\to+\infty}(4^n - 5000)^3 = +\infty.$$

Domanda 2. Si dimostri che ogni numero complesso $w \neq 0$ ha esattamente n radici complesse distinte.

Domanda 3. Sia $f \in \mathscr{C}([a,b])$ e sia F_c una sua *funzione integrale con punto iniziale* $c \in [a,b]$. Quale legame fondamentale sussiste tra F_c e f? Si dimostri che F_c è crescente su $[a,b]$ sse $f \geqslant 0$ su $[a,b]$.

Traccia 4

Domanda 1. Cos'è un numero complesso? Esprimere in forma algebrica il numero

$$\frac{a+ib}{c+id}$$

laddove la divisione abbia senso.

Domanda 2. Una funzione continua $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ assume sia valori positivi che negativi sul proprio dominio D. È vero che deve necessariamente azzerarsi da qualche parte in D? Se falso, sotto quali ipotesi ciò diventa sicuramente vero? Enunciare e dimostrare un risultato preciso.

Domanda 3. Sia $a_n \geqslant 0$ e si considerino le serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n a_n^2$. Si dimostri che se $\sum_n a_n$ converge allora converge anche $\sum_n a_n^2$. Vale anche il viceversa? Giustificare la risposta.