1 Temi d'esame 2012 — 2016 (a cura di G. Colombo)

NOTA: sia $\ln$ che $\log$ indicano il logaritmo in base e.

1.1 2012, Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 1 e 4

Appello del 7.02.2012

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\arctan 3t}{t} dt,$$

(a) dimostrare che il dominio è $\mathbb{R}$, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cos \ln x + \cos \arctan x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln(1+x^2) - \sin x^2}$$

Esercizio 3 [7 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$i\,\mathrm{Re} z + z^2 = |z|^2 - 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile tre volte e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Si dimostri che x_0 è un punto di flesso per f.

TEMA 2

Esercizio 1 [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \int_{2}^{x} \frac{\arctan 2t}{t} dt,$$

(a) dimostrare che il dominio è $\mathbb{R}$, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;

(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \ln x + \cos \sin 2x - e^{-2x^2}}{\ln(1-x^2) + \arctan x^2}$$

Esercizio 3 [7 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_0^9 \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$i\,\mathrm{Im} z + z^2 = |z|^2 - 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

TEMA 3

Esercizio 1 [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \int_{-2}^{x} \frac{\arctan 2t}{t} dt,$$

(a) dimostrare che il dominio è $\mathbb{R}$, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cos \ln x^2 - \cos \sinh 2x + e^{-2x^2}}{\ln(1+x^2) - \tan x^2}$$

Esercizio 3 [7 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_1^{16} \frac{e^{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[4]{x}}\, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$i\,\mathrm{Re} z - z^2 + 1 = |z|^2$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

TEMA 4

Esercizio 1 [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \int_1^x \frac{\arctan 3t}{t} dt,$$

(a) dimostrare che il dominio è $\mathbb{R}$, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \ln x - \cos \tan x + e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln(1-x^2) + \sinh x^2}$$

Esercizio 3 [7 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_1^{27} e^{\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$i\,\mathrm{Im} z - z^2 + 1 = |z|^2$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Appello del 23.02.2012

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{|x^2-4|} - |x| + 1$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big|\alpha - 1\big|^n \frac{n!}{(n+1)! - n! + 1}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x + 2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente e lo si calcoli.

Esercizio 4 [4 punti] Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 + iz + 2\big)\big(z^3 - 8i\big).$$

Esercizio 5 [facoltativo] Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{n^2}}{(n!)^{\alpha n}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{N}$.

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{|x^2 - 9|} - |x| + 2$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big|\alpha + 1\big|^n \frac{(n-1)!}{n! - (n-1)! + 2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 2e^x + 2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente e lo si calcoli.

Esercizio 4 [4 punti] Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 - 3iz - 2\big)\big(z^3 + 8i\big).$$

TEMA 3

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = 3|x| - 4\sqrt{|x^2-1|} - 2$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big|\alpha - 2\big|^n \frac{(n-1)!}{n! - (n-1)! + 4}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^{2x} + 2e^x + 2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente e lo si calcoli.

Esercizio 4 [4 punti] Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 + 3iz - 2\big)\big(z^3 - 27i\big).$$

Esercizio 5 [facoltativo] Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{n^2}}{(n!)^{\alpha n}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{N}$.

TEMA 4

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = 2|x| - 3\sqrt{|x^2-2|} - 1$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big|\alpha + 2\big|^n \frac{n!}{(n+1)! - n! + 3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x + 2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente e lo si calcoli.

Esercizio 4 [4 punti] Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 - iz + 2\big)\big(z^3 + 27i\big).$$

Appello del 17.07.2012

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \left|\frac{x-2}{x+3}\right| \mathrm{e}^{|x-2|}$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e dimostrare che esiste $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$ se $|x| > M$;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [8 punti] Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) - \sin\frac{1}{2x^2} - e^{-x}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \arctan\frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 3 [10 punti] (a) Calcolare l'ordine di infinito per $x \to 3$ della funzione

$$g(x) = \frac{x}{9 - x^2};$$

b) dire per quali $\alpha \geq 0$ converge l'integrale

$$I = \int_0^3 \frac{x}{\left(9 - x^2\right)^\alpha} dx;$$

c) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$|z + 2i| = \Big||z| - 2\Big|$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

TEMA 2

Esercizio 1 [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \left|\frac{x+2}{x-3}\right| \mathrm{e}^{|x+2|}$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e dimostrare che esiste $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$ se $|x| > M$;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [8 punti] Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} + \sin\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) + \arctan\frac{1}{2x^2}}{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \sin\frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 3 [10 punti] (a) Calcolare l'ordine di infinito per $x \to 2$ della funzione

$$g(x) = \frac{x}{4-x^2};$$

b) dire per quali $\alpha \geq 0$ converge l'integrale

$$I = \int_0^2 \frac{x}{\left(4-x^2\right)^\alpha} dx;$$

c) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$|z - 3i| = \Big||z| - 3\Big|$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

Appello del 18.09.2012

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \ln\cosh x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti; provare che $f(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}$;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\Big[e^{-n}\sin n + \cos\sin\frac{1}{n} - e^{\frac{-1}{2n^2}} + \frac{1}{12}\frac{1}{n^4}\Big]^{\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
Esercizio 3 [8 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 27}{\left(\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}\right)^2},$$

si calcoli una primitiva di f (sugg.: effettuare la sostituzione $x = t^6$).
Esercizio 4 [5 punti] Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$z^6 - iz^3 + 2 = 0$$

e rappresentarle sul piano di Gauss.

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \ln\cosh x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti; provare che $f(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{\ln(-2+\sqrt{5})}{2}$;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.
Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\Big[\frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + \cosh\sinh\frac{1}{n} - e^{\frac{1}{2n^2}} - e^{-2n}\cos n\Big]^{\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
Esercizio 3 [8 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 8}{\left(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}\right)^2},$$

si calcoli una primitiva di f (sugg.: effettuare la sostituzione $x = t^6$).
Esercizio 4 [5 punti] Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$z^6 + 2iz^3 + 3 = 0$$

e rappresentarne le soluzioni sul piano di Gauss.

1.2 2013, Area dell'Ingegneria dell'Informazione, tutti i canali

Appello del 5.02.2013

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin\sqrt{1 - 2\log^2 x}.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.
2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f.
3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.
4) Calcolare i limiti significativi di f'.
5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [8 punti] Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{4x}{1+x^2}\right)^n.$$

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\, dx.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{2z+1}{2z-1}\right)^3 = 1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f \in C([0,1])$ una funzione continua. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx.$$

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin\sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{2}}.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.

4) Calcolare i limiti significativi di f'.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [8 punti] Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{-8x}{4+x^2} \right)^n .$$

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} \, dx.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{2z+1}{1-2z} \right)^3 = -1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

TEMA 3

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1 - 2\log^2 x}.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.

4) Calcolare i limiti significativi di f'.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [8 punti] Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{12x}{9+x^2} \right)^n .$$

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 5}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+4}}{e^x+5}\, dx.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{3z+1}{3z-1}\right)^3 = 1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

TEMA 4

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}}.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.
2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f.
3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.
4) Calcolare i limiti significativi di f'.
5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [8 punti] Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{-4x}{1+x^2}\right)^n.$$

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x-4}}{e^x-5}\, dx.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{3z+1}{1-3z}\right)^3 = 1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

Appello del 20.02.2013

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = x \left| 3 + \frac{1}{\log(2x)} \right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnarne un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [10 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{7/2}\,\log^2 x - 1 + \sin x^2 + \cos\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)}{\sinh x - x^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3 [8 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sin\frac{1}{x}\, dx$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$\left| z^2\left(z - \overline{(z-4i)}\right) \right| = \left| z\overline{z} - z(z-4i) \right|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua e crescente. Sia

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt, \quad x > 0.$$

Si provi che g è crescente.

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = x \left| 2 - \frac{1}{\log(3x)} \right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';

(e) disegnarne un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [10 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^2 + \cos\log(1+\sqrt{2}\,x) - 1 + x^{13/4}\,\log^2 x}{\sin x - x^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3 [8 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\cos\frac{1}{x}\,dx$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$\left|z^2\big(z - \overline{(z-2i)}\big)\right| = \left|z\overline{z} - z(z-2i)\right|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

TEMA 3

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = x\left|6 + \frac{1}{\log(4x)}\right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnarne un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [10 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{10/3}\,\log^3 x + \cosh(e^{\sqrt{2}\,x} - 1) - 1 - \sin x^2}{x^\alpha - \sin x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3 [8 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}\,dx$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$\left|z^2\big(\overline{(z+4i)} - z\big)\right| = \left|z(z+4i) - z\overline{z}\right|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua e crescente. Sia

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt, \quad x > 0.$$

Si provi che g è crescente.

TEMA 4

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = x \left| 6 - \frac{1}{\log x} \right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnarne un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [10 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{15/4} \log^3 x - \sinh x^2 + \cosh \log(1 - \sqrt{2}\, x) - 1}{x^\alpha - \arctan x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3 [8 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sinh \frac{1}{x}\, dx$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$\left| z^2 \big(z - \overline{(z + 2i)}\big) \right| = \left| z\overline{z} - z(z + 2i) \right|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

Appello del 15.07.2013

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \cosh x - \log |\sinh x - 1|.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.

4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [8 punti]
a) Dato il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0, \tag{1}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 + \log(n!) + \cos n\right) \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) \log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \log(n-1)\right).$$

b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).

Esercizio 3 [9 punti]
a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2x} + 1} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 = -16\overline{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log|\sinh x - 2| - \log\cosh x.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.

4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [8 punti]
a) Dato il limite
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n!)}{n^2}=0, \tag{1}$$
calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2+\log(n!)+\sin n\right)\left(\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1)-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1)\right).$$
b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).

Esercizio 3 [9 punti]
a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_0^{+\infty}\frac{3-e^{\alpha x}}{e^{2x}+3}dx$$
al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.
b) Calcolarlo per $\alpha=1$.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z\in\mathbb{C}$ dell'equazione
$$z^3=-2(1+\sqrt{3}i)\overline{z}$$
esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

Appello del 16.09.2013

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione
$$f(x)=2x-\sqrt{|x^2-4x+3|},$$

(a) determinarne il segno ed eventuali asintoti;

(b) studiarne la derivabilità e calcolare f';

(c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;

(d) calcolare i limiti significativi di f';

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità.

Esercizio 2 [9 punti] Discutere, al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)-\frac{\alpha}{n}\right).$$

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x+3}} dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Rappresentare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left| |z-1|^2 - \left| \frac{z-\overline{z}}{2} \right|^2 - 1 \right| \geq \mathrm{Im} z - 3$$

nel piano complesso.

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 5x + 6|},$$

(a) determinarne il segno ed eventuali asintoti;

(b) studiarne la derivabilità e calcolare f';

(c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;

(d) calcolare i limiti significativi di f';

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità.

Esercizio 2 [9 punti] Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n\left(\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right) - \frac{\alpha}{n} \right).$$

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x-3}} \, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Rappresentare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left| |z-1|^2 - \left| \frac{z-\overline{z}}{2} \right|^2 - 1 \right| \leq \mathrm{Im} z + 4$$

nel piano complesso.

Appello del 3.02.2014

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{\log|x| - 1}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.
2) Calcolare i limiti significativi di f, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.
3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.
4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.
5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh x^\alpha - \cos(\sqrt{x})\log(1 + \sin x)}{\log\cos 2x + x^3 \log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3 [9 punti] Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x+2)^{\frac{\alpha-1}{2}}(4+x)^{2\alpha}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Esercizio 4 [5 punti] Sia $f(z) = 2iz^2$, $z \in \mathbb{C}$. Sia $A = \{\alpha(1+i) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si determinino l'insieme $A_1 = \{f(z) : z \in A\}$ e l'insieme $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in A\}$ e li si rappresentino nel piano di Gauss.

Esercizio 5 [facoltativo] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha + 1}\,dx\right)^2$$

al variare di $\alpha > 0$.

TEMA 2

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{3x}{\log|x| - 2}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.
2) Calcolare i limiti significativi di f, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.

3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.

4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^\alpha + \cosh(\sqrt{x})\log(1-\sinh x)}{\log\cosh 3x + x^3 \log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3 [9 punti] Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x}{(x+3)^{\frac{\alpha-1}{3}}(x+2)^{2\alpha}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Esercizio 4 [5 punti] Sia $f(z) = 4iz^2$, $z \in \mathbb{C}$. Sia $A = \{\alpha(1-i) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si determinino l'insieme $A_1 = \{f(z) : z \in A\}$ e l'insieme $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in A\}$ e li si rappresentino nel piano di Gauss.

TEMA 3

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{4-\log|x|}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.

2) Calcolare i limiti significativi di f, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.

3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.

4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x) - \sin x^\alpha}{\log\cos\frac{x}{2} + x^3\log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3 [9 punti] Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x}{(x+1)^{2(\alpha-1)}(x+3)^{2\alpha}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Esercizio 4 [5 punti] Sia $f(z) = 2z^2/i$, $z \in \mathbb{C}$. Sia $A = \{\alpha(1-i) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si determinino l'insieme $A_1 = \{f(z) : z \in A\}$ e l'insieme $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in A\}$ e li si rappresentino nel piano di Gauss.

TEMA 4

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{2 - \log|x|}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.
2) Calcolare i limiti significativi di f, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.
3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.
4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.
5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\sqrt{x})\log(1-\sin x) + \sin x^\alpha}{\log\cosh\sqrt{2}x + x^3\log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3 [9 punti] Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x+2)^{\frac{\alpha-1}{4}}(5+x)^{2\alpha}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Esercizio 4 [5 punti] Sia $f(z) = 4z^2/i$, $z \in \mathbb{C}$. Sia $A = \{\alpha(1+i) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si determinino l'insieme $A_1 = \{f(z) : z \in A\}$ e l'insieme $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in A\}$ e li si rappresentino nel piano di Gauss.

Appello del 19.02.2014

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = (1 - |x|)e^{\frac{1}{2x+2}}.$$

1) Determinare il dominio e discutere il segno di f.
2) Calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli asintoti.
3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.
4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [9 punti] Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+1} \frac{x^n}{(x+4)^n}.$$

1) Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ c'è convergenza assoluta.

2) Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ c'è convergenza semplice.

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^{10} \arctan\left(\sqrt[3]{x-2}\right)\, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| |z+i|^2 + (z+i)^2 \right| \geq \left| |z+i|^2 - \overline{(z+i)}^2 \right| \right\}.$$

Appello del 15.07.2014

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \sqrt{|2-\mathrm{e}^x|} \right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.

2) Calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli eventuali asintoti. Studiare la derivabilità di f.

3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f. Calcolare i limiti significativi di f'.

4) Disegnare un grafico di f.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\sin(e^n)}{n^3+3\log n} (3x)^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\,(3+2\sqrt{x}+x)}dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Esercizio 4 [5 punti] Esprimere in forma trigonometrica e algebrica le soluzioni dell'equazione

$$\frac{z^4}{z^4+1} = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

e disegnarle nel piano di Gauss.

Appello del 12.09.2014

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = |1-x|\, e^{\arctan(4/x)}.$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.
2) Calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli eventuali asintoti. Studiare la continuità e la derivabilità di f.
3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f. Calcolare i limiti significativi di f'.
4) Disegnare un grafico di f.

Esercizio 2 [9 punti] Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^\alpha) - x^\alpha + 1 - \cosh x}{\sqrt{2+x^\alpha} - \sqrt{2-x^\alpha}}.$$

Esercizio 3 [9 punti] Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{(4-x)^\alpha}dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Esercizio 4 [5 punti] Determinare il numero complesso α tale che il polinomio

$$P(z) = z^3 - (6+2i)z^2 + (7+5i)z + \alpha$$

abbia $z_1 = 2$ come radice. Per tale valore di α trovare le altre due radici di $P(z)$ esprimendole in forma algebrica.

Appello del 26.01.2015

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = |x+1|\, e^{\frac{-1}{|x+3|}}\,.$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n-1}(x-2)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(\sin^2 x + 3\big) e^{2\cos x} |\sin x|\, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = i\bar{z}^3 - 3 + i, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \big\{f(z) : z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,(z) = 0\big\},$$
$$B = \big\{z \in \mathbb{C} : f(z) = i - 11\big\}.$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^t - 1}{t}\, dt.$$

Dimostrare che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo di f.

TEMA 2

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = -|x-3|\, e^{\frac{-1}{|x-1|}}\,.$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;

(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+\log n}{n}(x+1)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^2 x + 1\right) e^{3|\sin x|} \cos x \, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = i\bar{z}^3 + 1 - 2i, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \left\{ f(z) : z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\,(z) = 0 \right\},$$
$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : f(z) = 9 - 2i \right\}.$$

TEMA 3

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = |x+3|\, e^{\frac{-1}{|x+1|}} .$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1-\log n}{2-n}(x+2)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2 - \sin^2 x\right) e^{-\cos x} |\sin x| \, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = i + 2 - i\bar{z}^3, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \{f(z) : z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,(z) = 0\},$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = i - 6\}.$$

TEMA 4

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = -|x-3|\, e^{\frac{-1}{|x+3|}}\,.$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{n+2}(x-1)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(2 - \cos^2 x\big) e^{-2|\sin x|} \cos x \, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = 3i + 2 - i\bar{z}^3, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \{f(z) : z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\,(z) = 0\},$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 29 + 3i\}.$$

Appello del 20.02.2015

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sin(2x)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(2x)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.
(a) Si determinino il dominio D di f e le eventuali simmetrie; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).

Esercizio 2 [9 punti] (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x}{\sinh x - \log(1 + \sin x)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^1 x e^{2x} \left(e^{2x} - 1\right)^{\alpha/2} dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = -1$.

Esercizio 4 [5 punti] Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Re}\Big((z + i)^2\Big) \leq \mathrm{Im}\Big(i(\bar{z} - 2i)^2\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

TEMA 2

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{-1}{\sin(4x)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(4x)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
(a) Si determinino il dominio D di f e le eventuali simmetrie; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).

Esercizio 2 [9 punti] (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$1 + \log(1 + x + x^2) - \cosh(\alpha x) - \sinh x$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \log(1 + x + x^2) - \cosh(\alpha x) - \sinh x}{\log(1 + \arctan x) - \sinh x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^1 x e^{x/2} \big(e^{x/2} - 1\big)^{2\alpha}\, dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = -1/4$.

Esercizio 4 [5 punti] Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Re}\Big((z - 2i)^2\Big) \geq \mathrm{Im}\Big(i(\bar{z} + i)^2\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

TEMA 3

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x/2)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(x/2)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.
(a) Si determinino il dominio D di f e le eventuali simmetrie; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).

Esercizio 2 [9 punti] (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$\arctan x - e^{x^2+x} + \cosh(\alpha x)$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - e^{x^2+x} + \cosh(\alpha x)}{\sin x + \log(1 - \sinh x)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{x e^{3x}}{(e^{3x} - 1)^{\alpha/4}}\, dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 2$.

Esercizio 4 [5 punti] Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Im}\Big(i(\bar{z} - i + 2)^2\Big) \leq \mathrm{Re}\Big((z - 1 + i)^2\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

TEMA 4

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{-1}{\sin(x/3)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(x/3)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.
(a) Si determinino il dominio D di f e le eventuali simmetrie; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).

Esercizio 2 [9 punti] (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$\cos(\alpha x - x^2) + \tan x - \log(1 + x) - 1$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\alpha x - x^2) + \tan x - \log(1 + x) - 1}{\log(1 + \sin x) - \arctan x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^1 \frac{xe^{x/3}}{(e^{x/3} - 1)^{2\alpha}}\, dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 1/4$.

Esercizio 4 [5 punti] Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Im}\Big(i(\bar{z} + i - 1)^2\Big) \geq \mathrm{Re}\Big((z - 2 - i)^2\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

Appello del 16.07.2015

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = (x-1)\log|x-1| + x\log x.$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D, gli eventuali asintoti e gli eventuali punti in cui è possibile prolungarla per continuità;
(b) studiare la derivabilità di f, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo;
(c) studiare graficamente il segno di f e calcolare i limiti significativi di f';
(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-1)^n}{3^n + n^2|x-1|^4}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] (a) Provare che $\sinh\log(1+\sqrt{2}) = 1$.
(b) Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}+2}.$$

Esercizio 4 [5 punti] Si risolva l'equazione

$$\Big(\frac{1}{18} - \frac{i\sqrt{3}}{18}\Big)\bar{z}^2 = 1,$$

disegnandone le soluzioni nel piano di Gauss.

TEMA 2

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = (x+1)\log(x+1) + x\log|x|.$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D, gli eventuali asintoti e gli eventuali punti in cui è possibile prolungarla per continuità;
(b) studiare la derivabilità di f, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo;
(c) studiare graficamente il segno di f e calcolare i limiti significativi di f';
(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x-1)^n}{3^n + n^3|x-1|^4}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] (a) Provare che $\sinh\log(1+\sqrt{2}) = 1$.
(b) Calcolare l'integrale

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}+3}.$$

Esercizio 4 [5 punti] Si risolva l'equazione

$$\big(-2+2i\sqrt{3}\big)\bar{z}^2 = 1$$

disegnandone le soluzioni nel piano di Gauss.

Appello del 18.09.2015

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = x - 1 + \frac{x-1}{\log|x-1|}.$$

(a) Determinare le eventuali simmetrie ed il dominio D di f, i limiti di f agli estremi di D e i punti in cui è possibile prolungarla per continuità;
(b) determinare gli eventuali asintoti di f;
(c) studiare la derivabilità di f, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo;
(d) studiare graficamente il segno di f;
(e) calcolare i limiti significativi di f';
(f) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\log(1+x^2) - \cosh(\alpha x) + 1 - x^2 e^{-1/x}}{x^5\log x + x^4}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Si determinino tutti i parametri $\alpha, \beta > 0$ tali che l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^\alpha (x+2\sqrt{x-2}+1)^\beta}\,dx$$

converga e lo si calcoli per $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$.

Esercizio 4 [5 punti] Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Re}\,(z+1)\Big(\mathrm{Re}\,(z^2) - 2\mathrm{Re}\,(\bar{z}^2) + 2\big(\mathrm{Im}\,(iz)\big)^2\Big) \le \mathrm{Re}\Big(z + \frac{2}{1+i}\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

TEMA 2

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = 2 - x - \frac{x-2}{\log|x-2|}.$$

(a) Determinare le eventuali simmetrie ed il dominio D di f, i limiti di f agli estremi di D e i punti in cui è possibile prolungarla per continuità;
(b) determinare gli eventuali asintoti di f;
(c) studiare la derivabilità di f, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo;
(d) studiare graficamente il segno di f;
(e) calcolare i limiti significativi di f';
(f) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh \log(1-x^2) - \cos(\alpha x) + 1 - xe^{-1/x}}{x^4 - x^6 \log x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Si determinino tutti i parametri $\alpha, \beta > 0$ tali che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^\alpha (x + 4\sqrt{x-1} + 2)^\beta}\, dx$$

converge e lo si calcoli per $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$.

Esercizio 4 [5 punti] Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Re}\,(z-1)\Big(\mathrm{Re}\,(\bar{z}^2) - 2\mathrm{Re}\,(z^2) + 2\big(\mathrm{Im}\,(iz)\big)^2\Big) \geq \mathrm{Re}\Big(z - \frac{2}{1-i}\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

Appello del 25.01.2016

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{x+1}{|x-1|}}\,.$$

(a) Determinare il dominio D di f e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti (**il calcolo dell'asintoto per $x \to -\infty$ è facoltativo e vale 3 punti in più**);
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\big(\log(x-3)\big)^n}{n-1}$$

converga, risp. converga assolutamente.

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/2} \big(\arcsin 2x\big)^2 dx$$

Esercizio 4 [4 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z+1}{\bar{z}}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determini e si disegni sul piano di Gauss l'insieme

$$A = \big\{ z \in \mathbb{C} : f(z) = z \big\}.$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^{-t}-1}{t}\, dt.$$

Calcolare lo sviluppo di Taylor di f di ordine 2 con punto iniziale 0.

TEMA 2

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{|x+1|} - \frac{\pi}{4}}.$$

(a) Determinare il dominio D di f e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti (**il calcolo dell'asintoto per $x \to +\infty$ è facoltativo e vale 3 punti in più**);
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\big(\log(x-1)\big)^n}{\sqrt{n}+1}$$

converga, risp. converga assolutamente.

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \big(\arcsin \frac{x}{2}\big)^2 dx$$

Esercizio 4 [4 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1-\bar{z}}{z}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determini e si disegni nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \big\{ z \in \mathbb{C} : f(z) = \bar{z} \big\}.$$

TEMA 3

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{|x+2|} - \frac{\pi}{4}}\,.$$

(a) Determinare il dominio D di f e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti (**il calcolo dell'asintoto per $x \to +\infty$ è facoltativo e vale 3 punti in più**);
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\big(\log(x+2)\big)^n}{\sqrt{n}-1}$$

converga, risp. converga assolutamente.

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{-1/3}^{1/3} \big(\arcsin 3x\big)^2 dx$$

Esercizio 4 [4 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z+2}{\bar{z}}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determini e si disegni nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \big\{ z \in \mathbb{C} : f(z) = 2z \big\}.$$

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{x+2}{|x-1|}}\,.$$

(a) Determinare il dominio D di f e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti (**il calcolo dell'asintoto per $x \to -\infty$ è facoltativo e vale 3 punti in più**);
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\log(x+1)\big)^n}{n+2}$$

converga, risp. converga assolutamente.

Esercizio 3 [**9 punti**] Calcolare l'integrale

$$\int_{-3}^{0} \big(\arcsin \frac{x}{3}\big)^2 dx$$

Esercizio 4 [**4 punti**] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{\bar{z} - 2}{z}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determini e si disegni nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \big\{z \in \mathbb{C} : f(z) = -2\bar{z}\big\}.$$

TEMA 4

Esercizio 1 [**9 punti**] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{x+2}{|x-1|}}.$$

(a) Determinare il dominio D di f e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti (**il calcolo dell'asintoto per $x \to -\infty$ è facoltativo e vale 3 punti in più**);
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [**9 punti**] Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\log(x+1)\big)^n}{n+2}$$

converga, risp. converga assolutamente.

Esercizio 3 [**9 punti**] Calcolare l'integrale

$$\int_{-3}^{0} \big(\arcsin \frac{x}{3}\big)^2 dx$$

Esercizio 4 [**4 punti**] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{\bar{z} - 2}{z}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determini e si disegni nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \big\{z \in \mathbb{C} : f(z) = -2\bar{z}\big\}.$$

Appello del 15.02.2016

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|\sin x|}{\cos x}\right)$$

nell'intervallo $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.
(a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
(c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f, determinandone gli eventuali punti di flesso;
(d) si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendo per periodicità il grafico di f in I).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x - \frac{9}{2}(\arctan \frac{x}{3})^3}{x - \sinh x + e^{-\frac{1}{x}}}$$

Esercizio 3 [9 punti] Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{\left(\sin\sqrt{1-x}\,\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{x^{\alpha+1}(1+x)^{\frac{3}{2}+\alpha}}$$

Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\alpha(x)dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 4 [5 punti] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\bar{z}^2 = 2iz, \qquad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

Esercizio 5 [facoltativo] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha}\, dx$$

e calcolarlo per tali α.

TEMA 2

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{\sin x}{|\cos x|}\right)$$

nell'intervallo $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.
(a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
(c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f, determinandone gli eventuali punti di flesso;
(d) si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendo per periodicità il grafico di f in I).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \arctan x - \frac{8}{3}(\sin\frac{x}{2})^3}{x - \sin x - e^{-\frac{1}{x^2}}}$$

Esercizio 3 [9 punti] Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{(\tan\sqrt{x}\,)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{(1-x)^{\alpha+1}(2-x)^{\frac{3}{2}+\alpha}}$$

Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\alpha(x)dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 4 [5 punti] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$2z^2 = i\bar{z}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

TEMA 3

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|\cos x|}{\sin x}\right)$$

nell'intervallo $I = [-\pi, \pi]$.
(a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
(c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f, determinandone gli eventuali punti di flesso;
(d) si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendo per periodicità il grafico di f in I).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{4}{3}(\sin\frac{x}{2})^3 + x^\alpha - \sinh x}{e^{-\frac{1}{x}} + x - \arctan x}$$

Esercizio 3 [9 punti] Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\beta(x) = \frac{\left(\arcsin\sqrt{1-x}\,\right)^{-\frac{3}{2}+\beta}}{x^{\beta-1}(1+x)^{-\frac{1}{2}+\beta}}$$

Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\beta(x)dx$$

al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\beta = \frac{3}{2}$.

Esercizio 4 [5 punti] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^2 = -4i\bar{z}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

TEMA 4

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{\cos x}{|\sin x|}\right)$$

nell'intervallo $I = [-\pi, \pi]$.
(a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
(c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f, determinandone gli eventuali punti di flesso;
(d) si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendo per periodicità il grafico di f in I).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{9}{2}(\arctan\frac{x}{3})^3 + x^\alpha - \sin x}{e^{-\frac{1}{x^2}} + \sinh 2x - 2x}$$

Esercizio 3 [9 punti] Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\beta(x) = \frac{\left(\arctan\sqrt{1-x}\,\right)^{-\frac{3}{2}-3\beta}}{x^{-3\beta-1}(1+x)^{-\frac{1}{2}-3\beta}}$$

Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\beta(x)dx$$

al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\beta = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 4 [5 punti] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\bar{z}^2 = -iz, \qquad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

Appello del 11.07.2016

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x-2)|3-x|}.$$

a) Determinare il dominio, calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

b) Studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f'.

c) **(Facoltativo, vale 2 punti in più)** Studiare la concavità e la convessità di f.

d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\arctan x - \cos x}{\log(1+x^2) - \sin(\alpha x^2)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente

$$\int_0^{\pi/8} \frac{\sin 2x}{|\log(\cos 2x)|^\alpha \cos 2x}\, dx$$

e calcolarne il valore per $\alpha = 1/2$.

Esercizio 4 [4 punti] Risolvere nel piano complesso l'equazione

$$2\bar{z}^3 = 3i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

TEMA 2

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x-1)|4-x|}.$$

a) Determinare il dominio, calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

b) Studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f'.

c) **(Facoltativo, vale 2 punti in più)** Studiare la concavità e la convessità di f.

d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh \arctan x - \cosh x}{\log(1-x^2) + \sinh(\alpha x^2)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente

$$\int_0^{\pi/9} \frac{\sin 3x}{|\log(\cos 3x)|^\alpha \cos 3x}\, dx$$

e calcolarne il valore per $\alpha = 1/2$.

Esercizio 4 [4 punti] Risolvere nel piano complesso l'equazione

$$3\bar{z}^3 = -2i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

Appello del 19.09.2016

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(2e^{2|x|} - e^{|x|} - 1\right).$$

a) Determinare il dominio e le eventuali simmetrie, calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

b) Studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f.

c) Studiare il segno e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f.

d) **(Facoltativo, vale 2 punti in più)** Studiare la concavità e la convessità di f.

e) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{n(x^2-x)}\right)^n}{n+1}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^2 |x-1| \log x \, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere la disequazione

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right| \le 1$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

TEMA 2

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(4e^{2|x|} - 3e^{|x|} - 1\right).$$

a) Determinare il dominio e le eventuali simmetrie, calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

b) Studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f.

c) Studiare il segno e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f.

d) **(Facoltativo, vale 2 punti in più)** Studiare la concavità e la convessità di f.

e) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{n(x^2-1)}\right)^n}{n+2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 |2x-1| \log x \, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere la disequazione

$$\left|\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right| \leq 1$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

2 Svolgimento dei temi d'esame 2012 — 2014

2.1 2012, Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 1 e 4

Appello del 7.02.2012

NB: in fondo allo svolgimento del tema 2 si trovano alcuni brevi commenti agli errori più comuni trovati nella correzione.
I Temi 3 e 4 non sono svolti.
Commenti dopo la prima prova orale: è molto importante prepararsi all'orale scrivendo tutte le definizioni, gli enunciati e le principali dimostrazioni e controllando quello che si è scritto. Non è assolutamente sufficiente "avere un'idea" delle cose: queste vanno scritte in modo corretto e comprensibile.

TEMA 1

Esercizio 1. Data la funzione
$$f(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\arctan 3t}{t} dt,$$
(a) dimostrare che il dominio è $\mathbb{R}$, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) studiarne concavità e convessità della funzione;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) Poniamo $g(t) = \arctan 3t/t$. Questa funzione è estendibile con continuità a $t = 0$ ponendo $g(0) = 3$, per cui g è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$; in particolare, è integrabile in $[-1, x]$ per ogni $x \geq 1$ e in $[x, -1]$ per ogni $x < -1$. Siccome g è sempre positiva, $f(x) > 0$ per ogni $x > -1$ e $f(x) < 0$ per ogni $x < -1$. Siccome $g(t) \sim \frac{\pi}{2t}$ per $t \to +\infty$ e per $t \to -\infty$, g non è integrabile in senso generalizzato né in $[-1, +\infty[$ né in $]-\infty, -1]$, cioè si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$
L'esistenza di asintoti obliqui è dunque da studiare. Si ha:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{(H)}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan 3x}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},$$
per cui non ci sono asintoti obliqui.
(b) Dal teorema fondamentale del calcolo e dal fatto che g è estendibile con continuità a 0 si ottiene
$$f'(x) = \frac{\arctan 3x}{x}, x \neq 0, \qquad f'(0) = 3.$$
Il segno di f' è sempre positivo, per cui f è strettamente crescente.
(c)
$$f''(x) = \frac{3x - (1 + 9x^2)\arctan 3x}{x^2(1 + 9x^2)}.$$
Per studiarne il segno, occorre considerare la funzione $h(x) = 3x - (1 + 9x^2)\arctan 3x$. Si ha che $h(0) = 0$ e $h'(x) = -18x \arctan 3x$, che è < 0 per ogni x. Di conseguenza, $h(x) > 0$ per ogni $x < 0$ e $h(x) < 0$ per

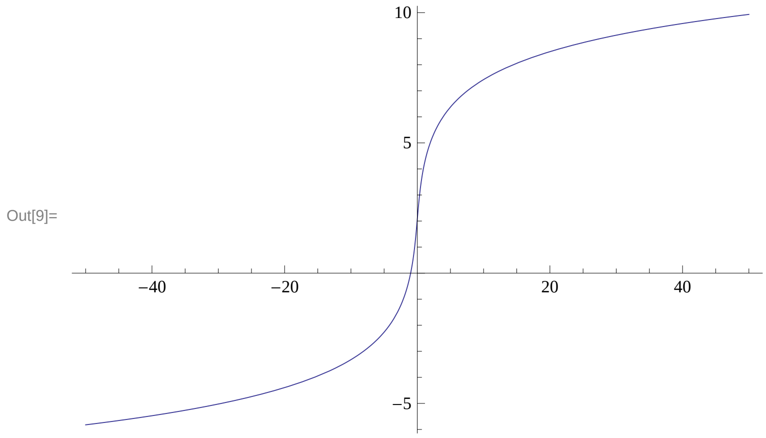


Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

ogni $x > 0$, cioè f è convessa in $]-\infty, 0]$ e concava in $[0, +\infty[$, per cui 0 è un punto di flesso. Il grafico è pertanto come in Figura 1.

Esercizio 2. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cos\ln x + \cos\arctan x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln(1+x^2) - \sin x^2}$$

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned}
\cos\arctan x &= 1 - \frac{(\arctan x)^2}{2} + \frac{(\arctan x)^4}{24} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0 \\
&= 1 - \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)^2 + \frac{x^4}{24} \qquad \text{per } x \to 0 \\
&= 1 - \frac{1}{2}\Big(x^2 - \frac{2}{3}x^4\Big) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0 \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0
\end{aligned}$$

e

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\ln(1+x^2) - \sin x^2 &= x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0 \\
&= -\frac{x^4}{2} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0.
\end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che $e^{-\frac{1}{x^2}}\cos\ln x = o(x^n)$ per $x \to 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, il limite diventa perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3. Calcolare l'integrale
$$\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\, dx.$$
Svolgimento. Con la sostituzione $x = t^3$ si ha
$$\begin{aligned}\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\, dx = 3\int_0^2 t^2 e^t\, dt &= 3\left[t^2e^t\Big|_0^2 - 2\int_0^2 te^t\, dt\right]\\ &= 3\left[4e^2 - 2\Big(te^t\Big|_0^2 - \int_0^2 e^t\, dt\Big)\right]\\ &= 12e^2 - 12e^2 + 6\big(e^2-1\big) = 6\big(e^2-1\big).\end{aligned}$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione
$$i\,\mathrm{Re}z + z^2 = |z|^2 - 1$$
e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Svolgimento. Poniamo $z = x + iy$. L'equazione diventa
$$ix + x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2 - 1,$$
cioè
$$ix(1+2y) = 2y^2 - 1.$$
Siccome il primo membro è puramente immaginario ed il secondo membro è reale, l'unica possibilità è che siano entrambi nulli, cioè
$$\begin{aligned} x(1+2y) &= 0\\ 2y^2 - 1 &= 0,\end{aligned}$$
che dà
$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = 0.$$
Le due soluzioni si trovano entrambe sull'asse immaginario.

Esercizio 5 [facoltativo]. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile tre volte e sia $x_0\in\mathbb{R}$ tale che $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0)\neq 0$. Si dimostri che x_0 è un punto di flesso per f.

Svolgimento. Per definizione di derivata (terza) si ha
$$f''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \qquad \text{per } x\to x_0$$
(ricordando che $f''(x_0) = 0$ per ipotesi)
$$\begin{aligned} &= f'''(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \qquad \text{per } x\to x_0\\ &= (x-x_0)\big(f'''(x_0) + o(1)\big) \qquad \text{per } x\to x_0.\end{aligned}$$
Siccome $f'''(x_0)\neq 0$ per ipotesi, esiste $\delta > 0$ tale che se $|x-x_0| < \delta$ allora $f'''(x_0) + o(1)$ ha lo stesso segno di $f'''(x_0)$, cioè se $|x-x_0|<\delta$ allora il segno di $f''(x)$ è uguale al segno di $(x-x_0)f'''(x_0)$. Questo segno è costante per $x < x_0$, $|x-x_0|<\delta$ e per $x > x_0$, $|x-x_0|<\delta$, ma cambia esattamente in x_0, che quindi è un punto di flesso.

TEMA 2

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \int_2^x \frac{\arctan 2t}{t} dt,$$

(a) dimostrare che il dominio è $\mathbb{R}$, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) studiarne concavità e convessità della funzione;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) Poniamo $g(t) = \arctan 2t/t$. Questa funzione è estendibile con continuità a $t = 0$ ponendo $g(0) = 2$, per cui g è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$; in particolare, è integrabile in $[2, x]$ per ogni $x \geq 2$ e in $[x, 2]$ per ogni $x < 2$. Siccome g è sempre positiva, $f(x) > 0$ per ogni $x > 2$ e $f(x) < 0$ per ogni $x < 2$. Siccome $g(t) \sim \frac{\pi}{2t}$ per $t \to +\infty$ e per $t \to -\infty$, g non è integrabile in senso generalizzato né in $[2, +\infty[$ né in $]-\infty, 2]$, cioè si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

L'esistenza di asintoti obliqui è dunque da studiare. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan 2x}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},$$

per cui non ci sono asintoti obliqui.
(b) Dal teorema fondamentale del calcolo e dal fatto che g è estendibile con continuità a 0 si ottiene

$$f'(x) = \frac{\arctan 2x}{x}, x \neq 0, \qquad f'(0) = 2.$$

Il segno di f' è sempre positivo, per cui f è strettamente crescente.
(c)

$$f''(x) = \frac{2x - (1 + 4x^2)\arctan 2x}{x^2(1 + 4x^2)}.$$

Per studiarne il segno, occorre considerare la funzione $h(x) = 2x - (1 + 4x^2)\arctan 2x$. Si ha che $h(0) = 0$ e $h'(x) = -8x \arctan 2x$, che è < 0 per ogni x. Di conseguenza, $h(x) > 0$ per ogni $x < 0$ e $h(x) < 0$ per ogni $x > 0$, cioè f è convessa in $]-\infty, 0]$ e concava in $[0, +\infty[$, per cui 0 è un punto di flesso. Il grafico è pertanto come in figura 2.

Esercizio 2. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \ln x + \cos \sin 2x - e^{-2x^2}}{\ln(1 - x^2) + \arctan x^2}$$

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned}
\cos\sin 2x &= 1 - \frac{(\sin 2x)^2}{2} + \frac{(\sin 2x)^4}{24} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0\\
&= 1 - \frac{1}{2}\Big(2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\Big)^2 + \frac{2x^4}{3} \qquad \text{per } x \to 0\\
&= 1 - \frac{1}{2}\Big(4x^2 - \frac{16}{3}x^4\Big) + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0\\
&= 1 - 2x^2 + \frac{10}{3}x^4 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0
\end{aligned}$$

Out[18]=

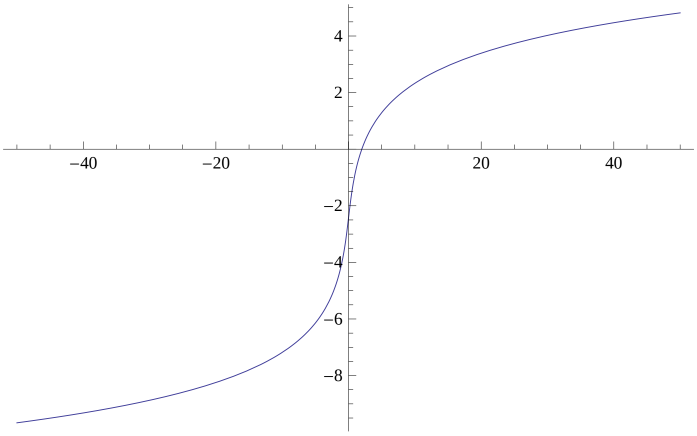


Figura 2: Il grafico di f (Tema 2).

e

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\ln(1-x^2) + \arctan x^2 &= -x^2 - \frac{x^4}{2} + x^2 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0\\ &= -\frac{x^4}{2} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0.\end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che $e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \ln x = o(x^n)$ per $x \to 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, il limite diventa perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = -\frac{8}{3}.$$

Esercizio 3. Calcolare l'integrale

$$\int_0^9 \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx.$$

Svolgimento. Con la sostituzione $x = t^2$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^9 \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\int_0^3 t^2 e^t\, dt &= 3\left[t^2 e^t \Big|_0^3 - 2\int_0^3 t e^t\, dt \right]\\ &= 2\left[9e^3 - 2\Big(t e^t \Big|_0^3 - \int_0^3 e^t\, dt \Big) \right]\\ &= 18e^3 - 12e^3 + 4\big(e^3 - 1\big) = 10e^3 - 4.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione

$$i\,\mathrm{Im} z + z^2 = |z|^2 - 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Svolgimento. Poniamo $z = x + iy$. L'equazione diventa

$$iy + x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2 - 1,$$

cioè

$$iy(1 + 2x) = 2y^2 - 1.$$

Siccome il primo membro è puramente immaginario ed il secondo membro è reale, l'unica possibilità è che siano entrambi nulli, cioè

$$\begin{aligned} y(1 + 2x) &= 0 \\ 2y^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

che dà

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Le due soluzioni si trovano entrambe su una retta parallela all'asse immaginario.

Commenti agli errori più comuni.

Esercizio 1) Molti studenti hanno parzialmente confuso l'integranda con l'integrale: di fatto hanno studiato l'integranda, in particolare per quanto riguarda gli asintoti, mentre per quanto riguarda la derivata hanno ragionato correttamente (per il calcolo). Non mi aspettavo questo tipo di errore. Moltissimi studenti hanno sbagliato il segno della derivata prima, che era sostanzialmente il segno di $\arctan x/x$: questo era un errore assolutamente evitabile.

Esercizio 2) Pochissimi studenti hanno calcolato correttamente il limite. La maggior parte ha tralasciato almeno un termine di ordine 4 al numeratore e non ha giustificato correttamente il fatto che si poteva trascurare $e^{-1/x^2}\ln\sin x$. In particolare, molti hanno erroneamente scritto che si poteva trascurare perché infinitesimo; altri hanno scritto che si poteva trascurare perché, ad esempio, $o(\cos\arctan x)$ per $x \to 0$. Ma questo è ovvio, perché $\cos\arctan x$ non è nemmeno infinitesimo per $x \to 0$. Si doveva invece dire che è $o(x^4)$ per $x \to 0$ (anzi $o(x^n)$ per ogni n). Altri hanno commesso il grossolano errore di sviluppare e^{-1/x^2} intorno a $x = 0$ come $1 - 1/x^2 \ldots$ A lezione si era cercato di mettere in guardia da questo tipo di errori.

Esercizio 4) Ricordo che la parte immaginaria del numero complesso $x + iy$ è y e non iy.

Appello del 23.02.2012

TEMA 1

COMMENTI.

1) *È MOLTO IMPORTANTE CHE CHI NON HA SUPERATO LO SCRITTO SI METTA A STUDIARE TUTTO DA CAPO E NON COMMETTA L'ERRORE DI SVOLGERE SOLO TEMI D'ESAME.*

2) COLPISCE IL NUMERO DI STUDENTI CHE NON È STATO IN GRADO DI RISOLVERE DISEQUAZIONI CON LA RADICE: QUASI NESSUNO HA STUDIATO CORRETTAMENTE IL SEGNO DI f.

3) SI RICORDA CHE IL CRITERIO ASINTOTICO DELLA RADICE E DEL RAPPORTO DANNO INFORMAZIONI ANCHE SULLA CONVERGENZA SEMPLICE: SE IL LIMITE È > 1, ALLORA LA SERIE NON CONVERGE NEANCHE SEMPLICEMENTE PERCHÉ IL TERMINE GENERALE NON È INFINITESIMO. SE CI SI LIMITA A DIRE CHE LA SERIE DIVERGE ASSOLUTAMENTE, NON SI RISPONDE ALLA DOMANDA SULLA CONVERGENZA SEMPLICE.

Esercizio 1 Data la funzione
$$f(x) = 2\sqrt{|x^2-4|} - |x| + 1$$
(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) La funzione è visibilmente definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è pari, per cui la studiamo per $x \geq 0$. Si ha
$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x^2-4} - x + 1 & \text{per } x \geq 2, \\ 2\sqrt{4-x^2} - x + 1 & \text{per } 0 < x < 2. \end{cases}$$
$f(x) \geq 0$, per $x \geq 2$, se e solo se $2\sqrt{x^2-4} \geq x - 1$. Siccome $x - 1 \geq 0$ se $x \geq 2$, si possono elevare al quadrato entrambi i membri, ottenendo la disequazione equivalente $3x^2 + 2x - 17 \geq 0$, che per $x \geq 2$ è soddisfatta dagli $x \geq \frac{-1+2\sqrt{13}}{3}$. Per $0 \leq x < 2$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $2\sqrt{4-x^2} \geq x - 1$, che è certamente soddisfatta se $x \leq 1$, mentre per $x > 1$ è equivalente alla disequazione $5x^2 - 2x - 15 \leq 0$, soddisfatta per $1 < x \leq \frac{1+2\sqrt{19}}{5} (< 2)$. In sintesi, $f(x) < 0$ se e solo se $\frac{1+2\sqrt{19}}{5} < x < \frac{-1+2\sqrt{13}}{3}$.
Siccome, per $x > 2$, $f(x) = x\big(2\sqrt{1-4/x^2} - 1\big) + 1$, visibilmente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Per trovare l'eventuale asintoto obliquo dobbiamo calcolare
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \Big(2\sqrt{x^2-4} - 2x + 1\Big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4(x^2-4) - (2x-1)^2}{2\sqrt{x^2-4} + 2x - 1} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x - 17}{2x\Big(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} + 1 - \frac{1}{2x}\Big)} = 1. \end{aligned}$$
Dunque la retta $y = x + 1$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, e quindi $y = -x + 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(b) Si ha
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 & \text{per } x > 2, \\ -\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} - 1 & \text{per } 0 < x < 2. \end{cases}$$
Per $0 < x < 2$ visibilmente $f'(x) < 0$, mentre, per $x > 2$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $2x \geq \sqrt{x^2-4}$, cioè sempre. Il minimo assoluto si trova in 2 (e quindi anche in -2), mentre 0 è un punto di massimo relativo. Si ha $\lim_{x\to0+} f'(x) = -1$, per cui 0 è un punto angoloso. Inoltre $\lim_{x\to2-} f'(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x\to2+} f'(x) = +\infty$, per cui 2 è un punto di cuspide.

(c) Si ha
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x^2-4} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{-8}{(x^2-4)^{3/2}} & \text{per } x > 2 \\ \frac{-2\sqrt{4-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{-8}{(4-x^2)^{3/2}} & \text{per } 0 < x < 2, \end{cases}$$
e quindi f è concava nei due intervalli $0 < x < 2$ e $x > 2$. Il grafico di f è perciò come in Figura 3.

Esercizio 2 Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big|\alpha - 1\big|^n \frac{n!}{(n+1)! - n! + 1}$$

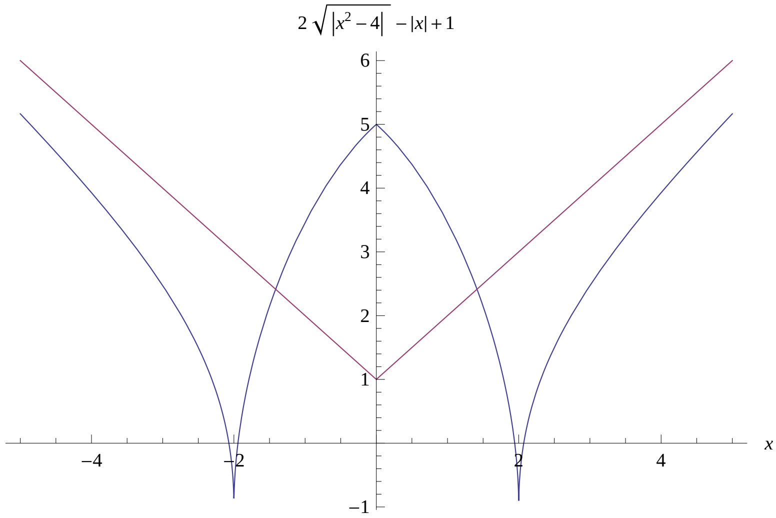


Figura 3: Il grafico di f (Tema 1).

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Per la convergenza assoluta usiamo il criterio del rapporto. Si ha (per $\alpha \neq 1$, caso banale in cui la serie ha il termine generale identicamente nullo):

$$\frac{|\alpha-1|^{n+1}(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!+1}\frac{(n+1)!-n!+1}{|\alpha-1|^n n!} = |\alpha-1|\frac{(n+1)(1+o(1))}{(n+2)(1+o(1))}$$
$$\to |\alpha-1| \qquad \text{per } \; n\to\infty.$$

Dunque la serie converge assolutamente per $|\alpha-1|<1$, cioè per $0<\alpha<2$, mentre non converge perché il termine generale non è infinitesimo per $|\alpha-1|>1$, cioè per $\alpha<0$ o per $\alpha>2$. Restano quindi da studiare i due casi $\alpha=0$ e $\alpha=2$, cioè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(n+1)!-n!+1}.$$

Siccome $\frac{n!}{(n+1)!-n!+1}\sim\frac{1}{n+1}$ per $n\to\infty$, la serie non converge assolutamente. Siccome inoltre una verifica immediata dà

$$\frac{(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!+1}\leq\frac{n!}{(n+1)!-n!+1} \qquad \text{per ogni } n \text{ sufficientemente grande,}$$

la serie converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x)=\frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente e lo si calcoli.

Svolgimento. Il denominatore non ha zeri reali, per cui l'integranda è una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$. Per verificare l'integrabilità in senso generalizzato basta osservare che

$$\frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2}\sim\frac{2}{e^x} \qquad \text{per } x\to+\infty$$

Siccome l'integranda ha segno definitivamente costante per $x \to +\infty$, risulta integrabile per confronto con $1/e^x$, che è integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty[$.
La sostituzione $e^x = t$ dà

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{2e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x + 2}\, dx &= \int_1^{+\infty} \frac{2t + 1}{t\big(t^2 + 2t + 2\big)}\, dt \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2t} + \frac{-t + 2}{2(t^2 + 2t + 2)} \right) dt \\
&= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{4}\frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 2} + \frac{3}{2}\frac{1}{t^2 + 2t + 2} \right) dt \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{\ln b}{2} - \frac{\ln\big(b^2 + 2b + 2\big) - \ln 5}{4} + \frac{3}{2}\int_1^b \frac{1}{(t+1)^2 + 1}\, dt \right) \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{\ln b}{2} - \frac{\ln\big(b^2 + 2b + 2\big) - \ln 5}{4} + \frac{3}{2}\big(\arctan(b+1) - \arctan 2\big) \right) \\
&= \lim_{b \to +\infty} \ln \frac{\sqrt[4]{5}\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b^2 + 2b + 2}} + \frac{3}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan 2\Big) \\
&= \frac{\ln 5}{4} + \frac{3}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan 2\Big).
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 + iz + 2\big)\big(z^3 - 8i\big).$$

Svolgimento. Gli zeri di $z^2 + iz + 2$ sono $z = \frac{-i + \sqrt{-9}}{2}$, cioè $i, -2i$. Gli zeri di $z^3 - 8i$ sono le radici cubiche di $8i$, cioè $z = 2e^{i\pi/6}, 2e^{i5\pi/6}, 2e^{i2\pi/3} = \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i$.

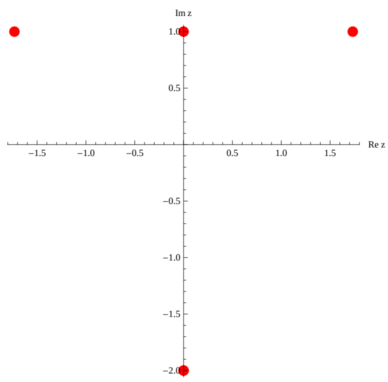


Figura 4: Soluzione dell'esercizio 4 (Tema 1).

Esercizio 5 [facoltativo] Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{n^2}}{(n!)^{\alpha n}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{N}$.

Svolgimento. Usiamo il criterio della radice. Si tratta perciò di calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^\alpha}.$$

Per $\alpha = 1$ è ben noto che tale limite è $+\infty$. Per $\alpha = 2$, osserviamo che si ha

$$\frac{n^n}{n!\,n!} \le \left(\frac{n}{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\right)^n \frac{1}{3^{n-2}}\frac{1}{4} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \to 0,$$

dove $[\frac{n}{2}]$ indica la parte intera di $\frac{n}{2}$, e quindi la serie converge. Per $\alpha > 2$ la serie converge per confronto con il caso $\alpha = 2$.

TEMA 2

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{|x^2-9|} - |x| + 2$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) La funzione è visibilmente definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è pari, per cui la studiamo per $x \ge 0$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x^2-9} - x + 2 & \text{per } x \ge 3, \\ 2\sqrt{9-x^2} - x + 2 & \text{per } 0 < x < 3. \end{cases}$$

$f(x) \ge 0$, per $x \ge 3$, se e solo se $2\sqrt{x^2-9} \ge x - 2$. Siccome $x - 2 \ge 0$ se $x \ge 3$, si possono elevare al quadrato entrambi i membri, ottenendo la disequazione equivalente $3x^2 + 4x - 40 \ge 0$, che per $x \ge 3$ è soddisfatta dagli $x \ge \frac{-2+2\sqrt{31}}{3}$. Per $0 \le x < 3$, $f(x) \ge 0$ se e solo se $2\sqrt{9-x^2} \ge x - 2$, che è certamente soddisfatta se $x \le 2$, mentre per $x > 2$ è equivalente alla disequazione $5x^2 - 4x - 32 \le 0$, soddisfatta per $1 < x \le \frac{2+2\sqrt{41}}{5} (< 3)$. In sintesi, $f(x) < 0$ se e solo se $\frac{2+2\sqrt{41}}{5} < x < \frac{-2+2\sqrt{31}}{3}$.
Siccome, per $x > 3$, $f(x) = x\big(2\sqrt{1-9/x^2} - 1\big) + 2$, visibilmente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Per trovare l'eventuale asintoto obliquo dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt{x^2-9} - 2x + 2\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4(x^2-9) - (2x-2)^2}{2\sqrt{x^2-9} + 2x - 2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{8x - 40}{2x\left(\sqrt{1-\frac{9}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}\right)} = 2.
\end{aligned}$$

Dunque la retta $y = x + 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, e quindi $y = -x + 2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(b) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}} - 1 & \text{per } x > 3, \\ -\frac{2x}{\sqrt{9-x^2}} - 1 & \text{per } 0 < x < 3. \end{cases}$$

Per $0 < x < 3$ visibilmente $f'(x) < 0$, mentre, per $x > 3$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $2x \geq \sqrt{x^2 - 9}$, cioè sempre. Il minimo assoluto si trova in 3 (e quindi anche in -3), mentre 0 è un punto di massimo relativo. Si ha $\lim_{x\to 0+} f'(x) = -1$, per cui 0 è un punto angoloso. Inoltre $\lim_{x\to 3-} f'(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x\to 3+} f'(x) = +\infty$, per cui 3 è un punto di cuspide.

(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x^2-9} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-9}}}{x^2-9} = \frac{-18}{(x^2-9)^{3/2}} & \text{per } \ x > 3 \\ \frac{-2\sqrt{9-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{-18}{(9-x^2)^{3/2}} & \text{per } \ 0 < x < 3, \end{cases}$$

e quindi f è concava nei due intervalli $0 < x < 3$ e $x > 3$. Il grafico di f è perciò come in Figura 5.

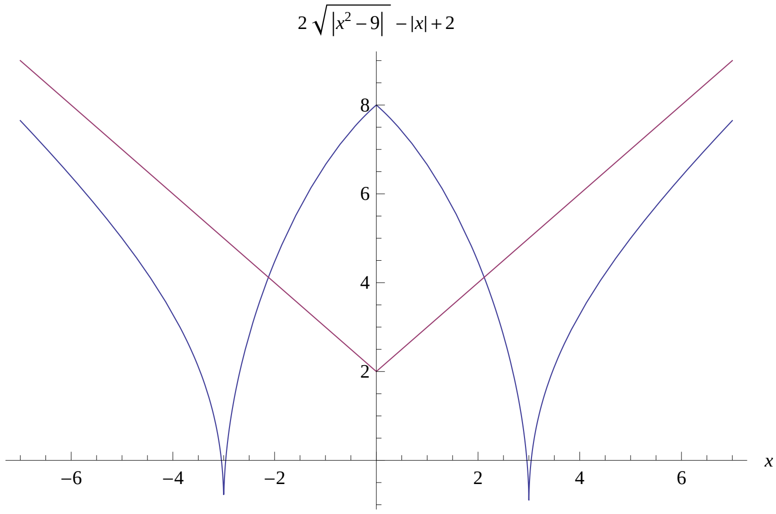


Figura 5: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2 Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left|\alpha + 1\right|^n \frac{(n-1)!}{n! - (n-1)! + 2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Per la convergenza assoluta usiamo il criterio del rapporto. Si ha (per $\alpha \neq -1$, caso banale in cui la serie ha il termine generale identicamente nullo):

$$\frac{|\alpha+1|^{n+1} n!}{(n+1)! - n! + 2} \frac{n! - (n-1)! + 2}{|\alpha+1|^n (n-1)!} = |\alpha+1| \frac{n(1+o(1))}{(n+1)(1+o(1))}$$
$$\to |\alpha+1| \qquad \text{per } \ n \to \infty.$$

Dunque la serie converge assolutamente per $|\alpha + 1| < 1$, cioè per $-2 < \alpha < 0$, mentre non converge perché il termine generale non è infinitesimo per $|\alpha + 1| > 1$, cioè per $\alpha < -2$ o per $\alpha > 0$. Restano quindi da studiare i due casi $\alpha = 0$ e $\alpha = -2$, cioè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)!}{n! - (n-1)! + 1}.$$

Siccome $\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+1} \sim \frac{1}{n}$ per $n \to \infty$, la serie non converge assolutamente. Siccome inoltre una verifica immediata dà

$$\frac{n!}{(n+1)!-n!+2} \leq \frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+2} \qquad \text{per ogni } n \text{ sufficientemente grande,}$$

la serie converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 2e^x + 2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente e lo si calcoli.

Svolgimento. Il denominatore non ha zeri reali, per cui l'integranda è una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$. Per verificare l'integrabilità in senso generalizzato basta osservare che

$$\frac{e^x - 1}{e^{2x} - 2e^x + 2} \sim \frac{1}{e^x} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Siccome l'integranda ha segno definitivamente costante per $x \to +\infty$, risulta integrabile per confronto con $1/e^x$, che è integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty[$.
La sostituzione $e^x = t$ dà

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 2e^x + 2}\, dx &= \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t\big(t^2 - 2t + 2\big)}\, dt \\
&= \int_1^{+\infty} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{t}{2(t^2 - 2t + 2)} \right) dt \\
&= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \left(-\frac{1}{2t} + \frac{2t-2}{4(t^2 - 2t + 2)} + \frac{1}{2(t^2 - 2t + 2)} \right) dt \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{\ln b}{2} + \frac{\ln\big(b^2 - 2b + 2\big)}{4} + \frac{1}{2} \int_1^b \frac{1}{(t-1)^2 + 1}\, dt \right) \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{\ln b}{2} + \frac{\ln\big(b^2 - 2b + 2\big)}{4} + \frac{1}{2} \arctan(b-1) \right) \\
&= \lim_{b \to +\infty} \ln \frac{\sqrt[4]{b^2 - 2b + 2}}{\sqrt{b}} + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 - 3iz - 2\big)\big(z^3 + 8i\big).$$

Svolgimento. Gli zeri di $z^2 - 3iz - 2$ sono $z = \frac{3i + \sqrt{-1}}{2}$, cioè $i, 2i$. Gli zeri di $z^3 + 8i$ sono le radici cubiche di $-8i$, cioè $z = 2e^{i\pi/2}, 2e^{i7\pi/6}, 2e^{11\pi/6} = 2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$.

Per il facoltativo si veda il Tema 1.

Appello del 17.07.2012

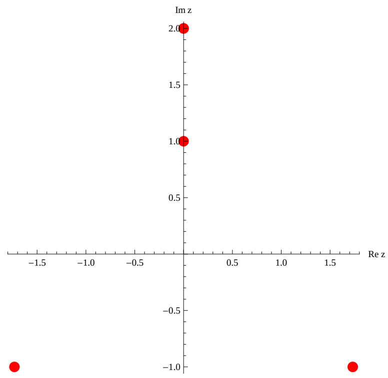


Figura 6: Soluzione dell'esercizio 4 (Tema 2).

TEMA 1

Esercizio 1 Data la funzione
$$f(x) = \left|\frac{x-2}{x+3}\right| \mathrm{e}^{|x-2|}$$
(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e dimostrare che esiste $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$ se $|x| > M$;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.
Svolgimento. (a) Il dominio è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\}$. Non ci sono simmetrie evidenti. La funzione è sempre ≥ 0 e si annulla solo per $x = 2$ (che pertanto è il punto di minimo assoluto). Si ha visibilmente $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-3} f(x) = +\infty$. Siccome
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{|x-2|}}{x} = \pm\infty,$$
non ci sono asintoti obliqui.
(b) Si può riscrivere
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+3} e^{2-x} & \text{per } x < -3 \\ \frac{2-x}{x+3} e^{2-x} & \text{per } -3 < x \leq 2 \\ \frac{x-2}{x+3} e^{x-2} & \text{per } 2 < x, \end{cases}$$
per cui risulta
$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+3-(x-2)}{(x+3)^2} - \frac{x-2}{x+3}\right) e^{2-x} = \frac{-x^2-x+11}{(x+3)^2} e^{2-x} & \text{per } x < -3 \\ \left(\frac{-x-3-(2-x)}{(x+3)^2} - \frac{2-x}{x+3}\right) e^{2-x} = \frac{x^2+x-11}{(x+3)^2} e^{2-x} & \text{per } -3 < x < 2 \\ \left(\frac{x+3-(x-2)}{(x+3)^2} + \frac{x-2}{x+3}\right) e^{x-2} = \frac{x^2+x+1}{(x+3)^2} e^{x-2} & \text{per } 2 < x. \end{cases}$$
Il polinomio $x^2 + x - 11$ si annulla in $\frac{-1-\sqrt{45}}{2} < -3 < 2 < \frac{-1+\sqrt{45}}{2}$, per cui solo il primo zero è da considerarsi. Il polinomio $x^2 + x + 1$ si annulla in $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ed entrambi i valori sono < 2. La funzione è pertanto decrescente per $x < \frac{-1-\sqrt{45}}{2}$, ha un punto di minimo relativo in $\frac{-1-\sqrt{45}}{2}$ ed è crescente per

$\frac{-1-\sqrt{45}}{2} < x < -3$. È inoltre decrescente per $-3 < x < 2$, mentre è crescente per $x > 2$. Il punto $x = 2$ è un punto angoloso, perché $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\frac{1}{5} \neq \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \frac{1}{5}$.
(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-58-13x+4x^2+x^3}{(x+3)^3} e^{2-x} & \text{per } x < -3 \\ -\frac{-58-13x+4x^2+x^3}{(x+3)^3} e^{2-x} & \text{per } -3 < x < 2 \\ \frac{2+7x+4x^2+x^3}{(x+3)^3} e^{x-2} & \text{per } 2 < x. \end{cases}$$

Siccome si ha evidentemente $\lim_{x\to\pm\infty} f''(x) = +\infty$, per definizione di limite esiste $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$ se $|x| > M$.
Il grafico risulta essere **Esercizio 2** Calcolare

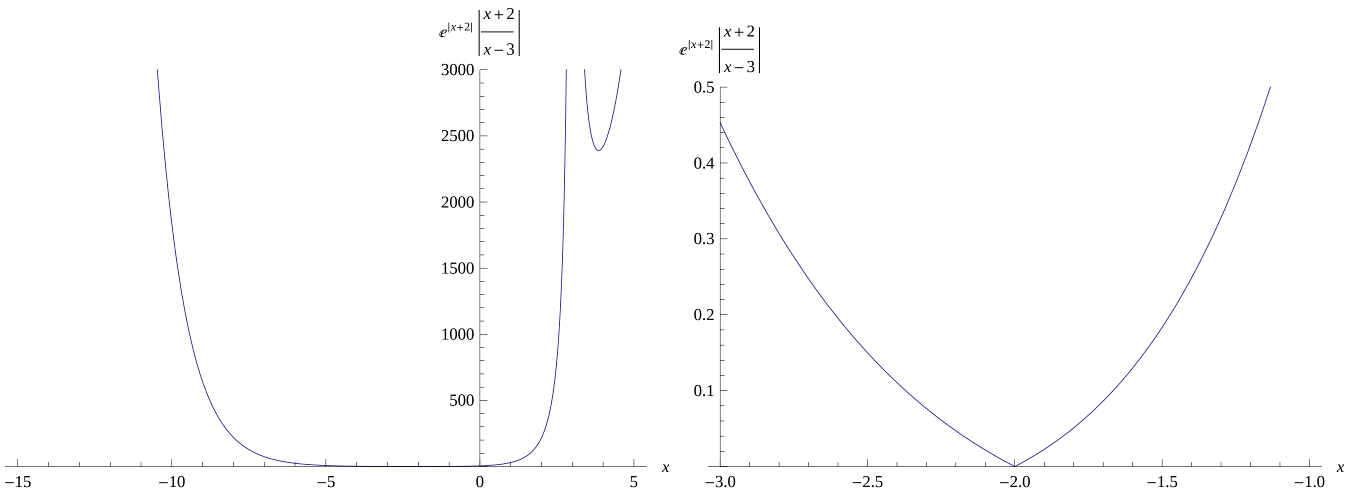


Figura 7: Il grafico di $f(x) = \left|\frac{x-2}{x+3}\right| \mathrm{e}^{|x-2|}$ (Tema 1); la figura sulla destra è un ingrandimento intorno al punto angoloso.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) - \sin\frac{1}{2x^2} - e^{-x}}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \arctan\frac{1}{x^2}}.$$

Svolgimento. Dati gli sviluppi

$$\arctan y = y + o(y^2) \text{ per } y \to 0, \cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + o(\frac{1}{x^5}), \sin\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^5}) \text{ per } x \to +\infty$$

e tenuto conto del fatto ben noto che $e^{-x} = \frac{1}{x^\alpha}$ per $x \to +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il numeratore risulta:

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{24x^4} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^4}) = -\frac{1}{24x^4} + o(\frac{1}{x^4}) \text{ per } x \to +\infty.$$

Il denominatore risulta

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^4}) = -\frac{1}{2x^4} + o(\frac{1}{x^4}) \text{ per } x \to +\infty.$$

Il limite pertanto risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{24x^4} + o(\frac{1}{x^4})}{-\frac{1}{2x^4} + o(\frac{1}{x^4})} = \frac{1}{12}.$$

Esercizio 3 (a) Calcolare l'ordine di infinito per $x \to 3$ della funzione

$$g(x) = \frac{x}{9 - x^2};$$

b) dire per quali $\alpha \geq 0$ converge l'integrale

$$I = \int_0^3 \frac{x}{\left(9 - x^2\right)^\alpha} dx;$$

c) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.
Svolgimento. (a) $g(x) = \frac{x}{(3+x)(3-x)}$, perciò è infinita di ordine 1 per $x \to 3$.
(b) Siccome l'integranda è infinita di ordine α (se $\alpha > 0$) per $x \to 3^-$, l'integrale risulta convergente se e solo se $\alpha < 1$. (c) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} dx = (x = 3t) \quad & 3 \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} dt \\ = -3(1 - t^2)^{1/2} & \Big|_{t=0}^{t=1} = 3. \end{aligned}$$

Esercizio 4 Risolvere l'equazione

$$|z + 2i| = \Big| |z| - 2 \Big|$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.
Svolgimento. Posto $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, l'equazione diventa

$$|x + i(2 + y)| = \left|\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right|,$$

cioè

$$x^2 + (2 + y)^2 = x^2 + y^2 + 4 - 4\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Semplificando, l'equazione diventa

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -y,$$

che ha per soluzioni $x = 0$ e $y \leq 0$.

Seguono soluzioni nel piano di Gauss.

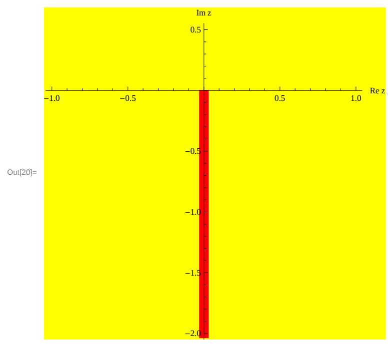


Figura 8: Soluzioni di $|z + 2i| = \Big| |z| - 2 \Big|$ (Tema 1).

TEMA 2

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = \left|\frac{x+2}{x-3}\right| \mathrm{e}^{|x+2|}$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e dimostrare che esiste $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$ se $|x| > M$;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) Il dominio è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}$. Non ci sono simmetrie evidenti. La funzione è sempre ≥ 0 e si annulla solo per $x = -2$ (che pertanto è il punto di minimo assoluto). Si ha visibilmente $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$. Siccome

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{|x+2|}}{x} = \pm\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui.
(b) Si può riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-3} e^{-x-2} & \text{per } x < -2 \\ \frac{x+2}{3-x} e^{x+2} & \text{per } -2 < x \leq 3 \\ \frac{x+2}{x-3} e^{x+2} & \text{per } 3 < x, \end{cases}$$

per cui risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2} - \frac{x+2}{x-3}\right) e^{-x-2} = \frac{-x^2+x+1}{(x-3)^2} e^{-x-2} & \text{per } x < -2 \\ \left(\frac{3-x+x+2}{(x-3)^2} + \frac{x+2}{3-x}\right) e^{x+2} = \frac{-x^2+x+11}{(x-3)^2} e^{x+2} & \text{per } -2 < x < 3 \\ \left(\frac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2} + \frac{x+2}{x-3}\right) e^{x+2} = \frac{x^2-x-11}{(x-3)^2} e^{x+2} & \text{per } 3 < x. \end{cases}$$

Il polinomio $x^2 - x - 11$ si annulla in $-2 < \frac{1-\sqrt{45}}{2} < 3 < \frac{1+\sqrt{45}}{2}$, per cui solo il secondo zero è da considerarsi. Il polinomio $-x^2 + x + 1$ si annulla in $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ed entrambi i valori sono > -2. La funzione è pertanto decrescente per $x < -2$, ha un punto di minimo relativo in $\frac{1-\sqrt{45}}{2}$ ed è crescente per $\frac{1-\sqrt{45}}{2} < x < 3$. È inoltre decrescente per $3 < x < \frac{1+\sqrt{45}}{2}$, mentre è crescente per $x > \frac{1+\sqrt{45}}{2}$. Il punto $x = -2$ è un punto angoloso, perché $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\frac{1}{5} \neq \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \frac{1}{5}$.
(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-2+7x-4x^2+x^3}{(x-3)^3} e^{-x-2} & \text{per } x < -2 \\ -\frac{58-13x-4x^2+x^3}{(x-3)^3} e^{x+2} & \text{per } -2 < x < 3 \\ \frac{58-13x-4x^2+x^3}{(x-3)^3} e^{x+2} & \text{per } 3 < x. \end{cases}$$

Siccome si ha evidentemente $\lim_{x\to\pm\infty} f''(x) = +\infty$, per definizione di limite esiste $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$ se $|x| > M$.
Il grafico risulta essere

Esercizio 2 Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} + \sin\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) + \arctan\frac{1}{2x^2}}{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \sin\frac{1}{x^2}}.$$

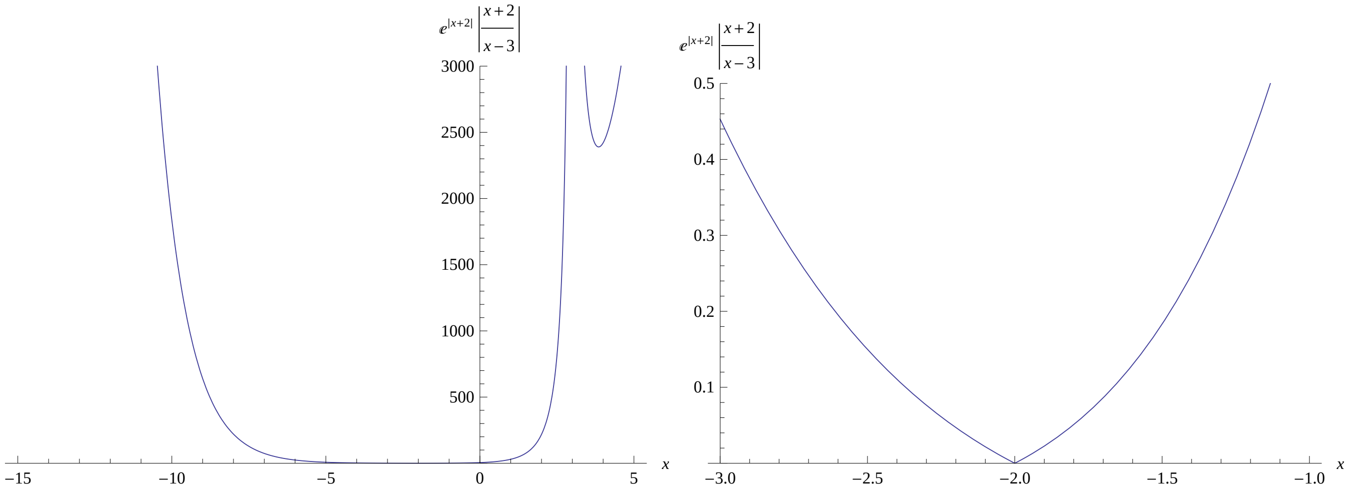


Figura 9: Il grafico di $f(x) = \left|\frac{x+2}{x-3}\right| \mathrm{e}^{|x+2|}$ (Tema 2); la figura sulla destra è un ingrandimento intorno al punto angoloso.

Svolgimento. Dati gli sviluppi

$$\sin y = y + o(y^2) \text{ per } y \to 0, \cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + o(\frac{1}{x^5}), \arctan\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^5}) \text{ per } x \to +\infty$$

e tenuto conto del fatto ben noto che $e^{-x} = \frac{1}{x^\alpha}$ per $x \to +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il numeratore risulta:

$$-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^4}) = \frac{1}{24x^4} + o(\frac{1}{x^4}) \text{ per } x \to +\infty.$$

Il denominatore risulta

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^4}) = -\frac{1}{2x^4} + o(\frac{1}{x^4}) \text{ per } x \to +\infty.$$

Il limite pertanto risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{24x^4} + o(\frac{1}{x^4})}{-\frac{1}{2x^4} + o(\frac{1}{x^4})} = -\frac{1}{12}.$$

Esercizio 3 (a) Calcolare l'ordine di infinito per $x \to 2$ della funzione

$$g(x) = \frac{x}{4 - x^2};$$

b) dire per quali $\alpha \geq 0$ converge l'integrale

$$I = \int_0^2 \frac{x}{(4 - x^2)^\alpha} dx;$$

c) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.
Svolgimento. (a) $g(x) = \frac{x}{(2+x)(2-x)}$, perciò è infinita di ordine 1 per $x \to 2$.

(b) Siccome l'integranda è infinita di ordine α (se $\alpha > 0$) per $x \to 2^-$, l'integrale risulta convergente se e solo se $\alpha < 1$. (c) Si ha

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = (x = 2t) \quad 2\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$
$$= -2(1-t^2)^{1/2}\Big|_{t=0}^{t=1} = 2.$$

Esercizio 4 Risolvere l'equazione

$$|z - 3i| = \Big||z| - 3\Big|$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.
Svolgimento. Posto $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, l'equazione diventa

$$|x + i(-3 + y)| = \big|\sqrt{x^2 + y^2} - 3\big|,$$

cioè

$$x^2 + (-3 + y)^2 = x^2 + y^2 + 9 - 6\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Semplificando, l'equazione diventa

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y,$$

che ha per soluzioni $x = 0$ e $y \geq 0$.

Seguono soluzioni nel piano di Gauss.

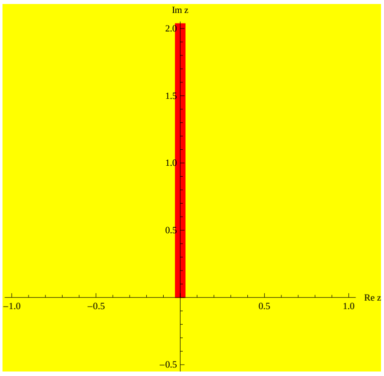


Figura 10: Soluzioni di $|z - 3i| = \Big||z| - 3\Big|$ (Tema 2).

Svolgimento dell'appello del 18.09.2012

TEMA 1

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \ln\cosh x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti; provare che $f(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}$;

(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.
Svolgimento. (a) Il dominio è $x \neq 0$. La funzione non presenta simmetrie evidenti e può essere riscritta come

$$f(x) = \ln \frac{\cosh x}{\sqrt{e^x |\sinh x|}}.$$

Si ha immediatamente che $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{\cosh^2 x}{e^x \sinh x} = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

Dunque la retta $y = -\frac{1}{2}\ln 2$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

perché $\lim_{x\to-\infty} e^x \sinh x = -1/2$.
Per la ricerca dell'asintoto obliquo per $x \to -\infty$ si devono calcolare il limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln \frac{\cosh^2 x}{-e^x \sinh x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{2(1-e^{2x})}}{2x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln \frac{e^{-2x}(1+2e^{2x}+e^{4x})}{2(1-e^{2x})}}{2x} = -1\end{aligned}$$

e poi il limite

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \ln\cosh x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x| = -\frac{1}{2}\ln 2$$

(lo svolgimento di questo limite è nel Tema 2). Perciò $y = -x - \frac{1}{2}\ln 2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
Per lo studio del segno di f, osserviamo che $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$\frac{\cosh x}{\sqrt{e^x|\sinh x|}} \geq 1,$$

cioè se e solo se

$$\cosh^2 x \geq e^x |\sinh x|. \tag{1}$$

Quest'ultima disequazione, per $x \geq 0$, è equivalente a

$$e^{4x} - 4e^{2x} - 1 \leq 0,$$

che ha per soluzioni $0 \leq x \leq \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}$. Per $x < 0$ la disequazione (1) è equivalente a

$$3e^{2x} + e^{-2x} \geq 0,$$

che è sempre vera.
(b) Siccome $\frac{d}{dx}\ln|\sinh x| = \cosh x/\sinh x$ per ogni $x \neq 0$, si ha, per ogni $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{2\sinh^2 x - \cosh^2 x - \sinh x\cosh x}{2\cosh x \sinh x} = \frac{e^{-2x} - 3}{4\cosh x \sinh x}.$$

Si ha perciò che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $-\frac{\ln 3}{2} \leq x < 0$. Il punto $-\frac{\ln 3}{2}$ è perciò di minimo locale stretto.
(c) Si ha immediatamente

$$f''(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{1}{2}\frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{3}{2\cosh^2 x \sinh^2 x} > 0.$$

La funzione è perciò convessa per $x < 0$ e per $x > 0$.
(d) Il grafico è in Figura 11.

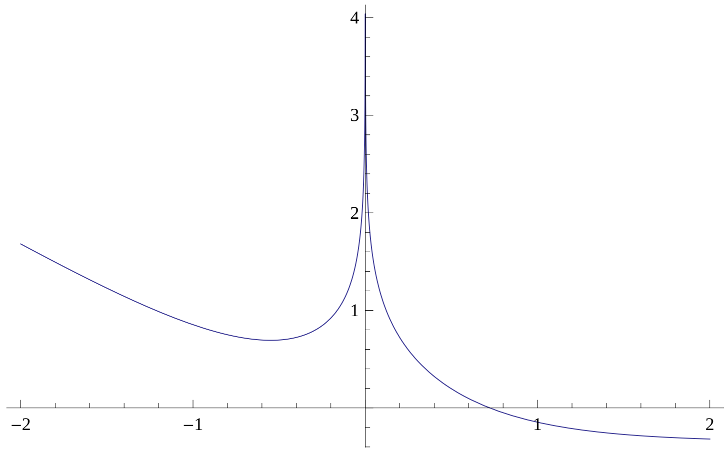


Figura 11: Il grafico di $f(x) = \ln\cosh x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$ (Tema 1).

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left[e^{-n}\sin n + \cos\sin\frac{1}{n} - e^{\frac{-1}{2n^2}} + \frac{1}{12}\frac{1}{n^4}\right]^{\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Utilizzando gli sviluppi asintotici si ha, per $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\cos\sin\frac{1}{n} &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{n} + \frac{1}{4!}\sin^4\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^2 + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{5}{24}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\end{aligned}$$

e

$$e^{\frac{-1}{2n^2}} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Inoltre $|e^{-n}\sin n| \leq e^{-n} = o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$ per $n \to +\infty$. Di conseguenza si ha, per $n \to +\infty$,

$$e^{-n}\sin n + \cos\sin\frac{1}{n} - e^{\frac{-1}{2n^2}} + \frac{1}{12}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Il termine generale della serie è perciò asintotico a

$$\frac{1}{6^\alpha}\frac{1}{n^{2+4\alpha}}.$$

La serie perciò converge se e solo se $2 + 4\alpha > 1$, cioè se e solo se

$$\alpha > -\frac{1}{4}.$$

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 27}{\left(\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}\right)^2},$$

si calcoli una primitiva di f (sugg.: effettuare la sostituzione $x = t^6$).
Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x} - 27}{\left(\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx &= 6\int \frac{t^3 - 27}{(t^3 - 3t^2)^2} t^5\,dt = 6\int \frac{t^4 - 27t}{t^2 - 6t + 9}\,dt \\
&= 6\int \frac{t^3 + 6t^2 + 9t}{t - 3}\,dt = 6\int \Big(t^2 + 6t + 27 + \frac{81}{t-3}\Big)\,dt \\
&= 6\Big(\frac{t^3}{3} + 3t^2 + 27t + 81\ln|t-3|\Big) + c \\
&= 2\sqrt{x} + 18\sqrt[3]{x} + 162\sqrt[6]{x} + 486\ln|\sqrt[6]{x} - 3| + c.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$z^6 - iz^3 + 2 = 0$$

e rappresentarle sul piano di Gauss.
Svolgimento. Poniamo $z^3 = w$. L'equazione

$$w^2 - iw + 2 = 0$$

ha per soluzioni $w = (i + \sqrt{-1-8})/2 = (i \pm 3i)/2 = 2i, -i$. Le soluzioni dell'equazione sono perciò le radici cubiche di $2i$ e di $-i$, cioè sono

$$\sqrt[3]{2}e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3} + i),\ \sqrt[3]{2}e^{i(\pi/6+2\pi/3)} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-\sqrt{3} + i),\ \sqrt[3]{2}e^{i(\pi/6+4\pi/3)} = -\sqrt[3]{2}\,i$$

e

$$e^{i\pi/2} = i, e^{i(\pi/2+2\pi/3)} = -\frac{\sqrt{3}+i}{2}, e^{i(\pi/2+4\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

TEMA 2

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \ln\cosh x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti; provare che $f(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{\ln(-2+\sqrt{5})}{2}$;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(c) studiarne concavità e convessità;

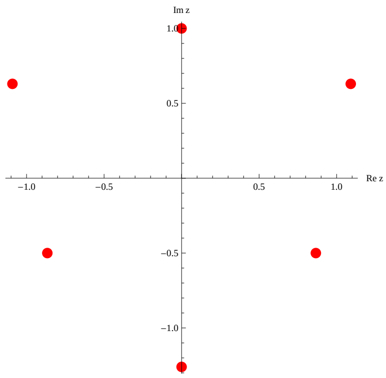


Figura 12: Le soluzioni di $z^6 - iz^3 + 2 = 0$ (Tema 1).

(d) disegnarne un grafico qualitativo.
Svolgimento. (a) Il dominio è $x \neq 0$. La funzione non presenta simmetrie evidenti e può essere riscritta come
$$f(x) = \ln \frac{\cosh x \sqrt{e^x}}{\sqrt{|\sinh x|}}.$$
Si ha immediatamente che $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Inoltre
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x\to -\infty} \ln \frac{e^x \cosh^2 x}{-\sinh x} = -\frac{1}{2}\ln 2.$$
Dunque la retta $y = -\frac{1}{2}\ln 2$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Inoltre
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sinh x} = 2$.
Per la ricerca dell'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ si devono calcolare il limite
$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln \frac{e^x\cosh^2 x}{\sinh x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln \frac{e^{3x}+e^{-x}+2e^x}{2(e^x-e^{-x})}}{2x} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln \frac{e^{2x}(1+e^{-2x}+e^{-3x})}{2(1-e^{-2x})}}{2x} = 1\end{aligned}$$
e poi il limite
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - x = \lim_{x\to +\infty} \ln\cosh x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x| = -\frac{1}{2}\ln 2$$
(lo svolgimento di questo limite è nel Tema 1). Perciò $y = x - \frac{1}{2}\ln 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
Per lo studio del segno di f, osserviamo che $f(x) \le 0$ se e solo se
$$\frac{\sqrt{e^x}\cosh x}{\sqrt{|\sinh x|}} \ge 1,$$
cioè se e solo se
$$e^x \cosh^2 x \ge |\sinh x|. \tag{2}$$

Quest'ultima disequazione, per $x \leq 0$, è equivalente a

$$e^{4x} + 4e^{2x} - 1 \leq 0,$$

che ha per soluzioni $0 \leq x \leq \frac{\ln(-2+\sqrt{5})}{2}$. Per $x > 0$ la disequazione (2) è equivalente a

$$e^{3x} + 3e^{-x} \geq 0,$$

che è sempre vera.
(b) Siccome $\frac{d}{dx} \ln|\sinh x| = \cosh x / \sinh x$ per ogni $x \neq 0$, si ha, per ogni $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{2\sinh^2 x - \cosh^2 x + \sinh x \cosh x}{2\cosh x \sinh x} = \frac{e^{2x} - 3}{4\cosh x \sinh x}.$$

Si ha perciò che $f'(x) \leq 0$ se e solo se $0 < x \leq \frac{\ln 3}{2}$. Il punto $\frac{\ln 3}{2}$ è perciò di minimo locale stretto.
(c) Si ha immediatamente

$$f''(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{1}{2}\frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{3}{2\cosh^2 x \sinh^2 x} > 0.$$

La funzione è perciò convessa per $x < 0$ e per $x > 0$.
(d) Il grafico è in Figura 13.

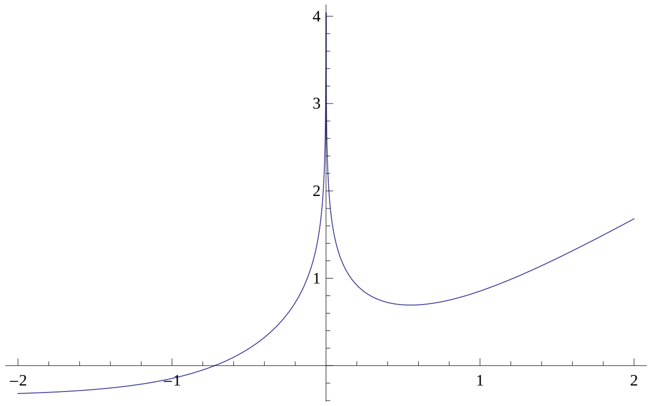


Figura 13: Il grafico di $f(x) = \ln\cosh x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$ (Tema 2).

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left[\frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + \cosh\sinh\frac{1}{n} - e^{\frac{1}{2n^2}} - e^{-2n}\cos n\right]^{\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Utilizzando gli sviluppi asintotici si ha, per $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\cosh\sinh\frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2}\sinh^2\frac{1}{n} + \frac{1}{4!}\sinh^4\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = 1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{3!n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^2 + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{5}{24}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\end{aligned}$$

e

$$e^{\frac{1}{2n^2}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Inoltre $e^{-2n}\cos n = o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$ per $n \to +\infty$. Di conseguenza si ha, per $n \to +\infty$,

$$\frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + e^{-2n}\cos n + \cosh\sinh\frac{1}{n} - e^{\frac{1}{2n^2}} = \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Il termine generale della serie è perciò asintotico a

$$\frac{1}{6^\alpha}\frac{1}{n^{3+4\alpha}}.$$

La serie perciò converge se e solo se $3+4\alpha > 1$, cioè se e solo se

$$\alpha > -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3 [8 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-8}{\big(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\big)^2},$$

si calcoli una primitiva di f (sugg.: effettuare la sostituzione $x = t^6$).
Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}-8}{\big(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\big)^2}\,dx &= 6\int \frac{t^3-8}{(t^3-2t^2)^2}t^5\,dt = 6\int \frac{t^4-8t}{t^2-4t+4}\,dt \\
&= 6\int \frac{t^3+2t^2+4t}{t-2}\,dt = 6\int \Big(t^2+4t+12+\frac{24}{t-2}\Big)\,dt \\
&= 6\Big(\frac{t^3}{3}+2t^2+12t+24\ln|t-2|\Big)+c \\
&= 2\sqrt{x}+12\sqrt[3]{x}+72\sqrt[6]{x}+144\ln|\sqrt[6]{x}-2|+c.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$z^6 + 2iz^3 + 3 = 0$$

e rappresentarne le soluzioni sul piano di Gauss.
Svolgimento. Poniamo $z^3 = w$. L'equazione

$$w^2 + 2iw + 3 = 0$$

ha per soluzioni $w = -i + \sqrt{-1-3} = -i \pm 2i = i, -3i$. Le soluzioni dell'equazione sono perciò le radici cubiche di i e di $-3i$, cioè sono

$$e^{i\pi/6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i), e^{i(\pi/6+2\pi/3)} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i), e^{i(\pi/6+4\pi/3)} = -i$$

e

$$\sqrt[3]{3}e^{i\pi/2} = i\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}e^{i(\pi/2+2\pi/3)} = -\sqrt[3]{3}\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \sqrt[3]{3}e^{i(\pi/2+4\pi/3)} = \sqrt[3]{3}\frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

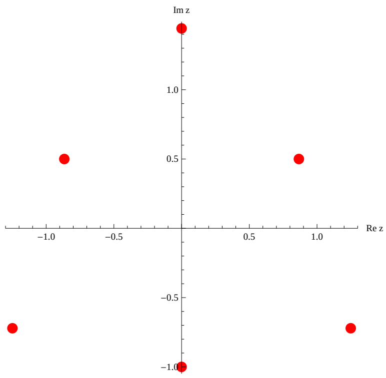


Figura 14: Le soluzioni di $z^6 + 2iz^3 + 3 = 0$ (Tema 2).

2.2 2013, Area dell'Ingegneria dell'Informazione, tutti i canali

Appello del 5.02.2013

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin\sqrt{1 - 2\log^2 x}.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.

4) Calcolare i limiti significativi di f'.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. 1) L'argomento x di f deve soddisfare le seguenti condizioni: $x > 0$ (dominio del logaritmo), e $0 \le 1 - 2\log^2 x \le 1$ (dominio della radice e dell'arcoseno). La condizione $1 - 2\log^2 x \ge 0$ dà

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \log x \le \frac{1}{\sqrt{2}},$$

cioè il dominio di f è l'intervallo $[e^{-1/\sqrt{2}}, e^{1/\sqrt{2}}]$.
2) f è visibilmente continua nel suo dominio. Le regole di derivazione si possono applicare dove le funzioni elementari di cui f è composizione sono derivabili, cioè dove l'argomento della radice non si annulla ($x \neq e^{-1/\sqrt{2}}, e^{1/\sqrt{2}}$) e dove l'argomento dell'arcoseno è diverso da ± 1 ($x \neq 1$). La funzione risulta perciò di classe $\mathcal{C}^1$ negli intervalli $]e^{-1/\sqrt{2}}, 1[$ e $]1, e^{1/\sqrt{2}}[$.
3) Si ha

$$f'(x) = \frac{-4\log x}{x}\frac{1}{2\sqrt{1 - 2\log^2 x}}\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - 2\log^2 x)}} = -\sqrt{2}\frac{\operatorname{sign}(\log x)}{x\sqrt{1 - 2\log^2 x}}.$$

Il segno di f' dipende perciò solo dal segno di $\log x$, quindi f è strettamente crescente in $[e^{-1/\sqrt{2}}, 1]$ e strettamente decrescente in $[1, e^{1/\sqrt{2}}]$. Gli estremi del dominio sono perciò punti di minimo assoluto (in cui f vale 0), mentre $x = 1$ è il punto di massimo assoluto (in cui f vale $\pi/2$).
4) $\lim_{x \to e^{-1/\sqrt{2}}+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \to e^{1/\sqrt{2}}-} f'(x) = -\infty$, cioè agli estremi del dominio la tangente al grafico di f è verticale. Inoltre si ha $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \sqrt{2} = -\lim_{x \to 1^+} f'(x)$, cioè $x = 1$ è un punto angoloso.
5) La derivata seconda non era richiesta, ma per completezza viene calcolcta e studiata. Per $x \in]e^{-1/\sqrt{2}}, 1[$ si ha

$$f''(x) = \sqrt{2}\frac{-\left(\sqrt{1-2\log^2 x} + x\frac{-4\log x}{2x\sqrt{1-2\log^2 x}}\right)}{x^2(1-2\log^2 x)} = \sqrt{2}\frac{2\log^2 x + 2\log x - 1}{x^2(1-2\log^2 x)^{3/2}},$$

mentre per $x \in]1, e^{1/\sqrt{2}}[$ è l'opposto. Il segno di f'' dipende perciò solo dal segno di $2\log^2 x + 2\log x - 1$. Le soluzioni della disequazione $2\log^2 x + 2\log x - 1 \geq 0$ sono: $x \leq e^{-(1+\sqrt{3})/2}$ e $x \geq e^{(-1+\sqrt{3})/2}$. Tenendo conto del fatto che $e^{-(1+\sqrt{3})/2} < e^{-1/\sqrt{2}} < 1 < e^{(-1+\sqrt{3})/2} < e^{1/\sqrt{2}}$, f risulta concava in $[e^{-1/\sqrt{2}}, 1]$, convessa in $[1, e^{(-1+\sqrt{3})/2}$, concava in $[e^{(-1+\sqrt{3})/2}, e^{1/\sqrt{2}}]$, con un flesso a tangente obliqua in $e^{(-1+\sqrt{3})/2}$.
Il grafico è perciò come in Figura 15.

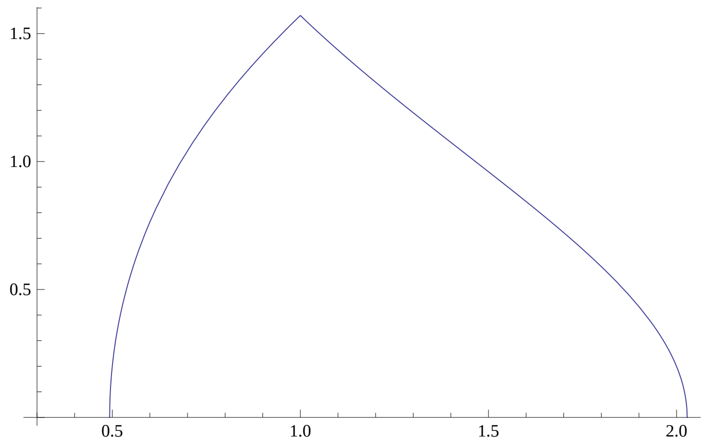


Figura 15: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{4x}{1+x^2}\right)^n.$$

Svolgimento. Usiamo il criterio della radice, dal quale ricaviamo informazioni sia sulla convergenza assoluta che sull'andamento del termine generale, che chiamiamo $a_n(x)$. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\left|\frac{4x}{1+x^2}\right| = \left|\frac{4x}{1+x^2}\right|.$$

Perciò se $\left|\frac{4x}{1+x^2}\right| < 1$ la serie converge assolutamente e quindi semplicemente, mentre se $\left|\frac{4x}{1+x^2}\right| > 1$ la serie non converge né assolutamente né semplicemente perché il suo termine generale non è infinitesimo. La disequazione $\left|\frac{4x}{1+x^2}\right| < 1$, è equivalente al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{4x}{1+x^2} & < 1 \\ \frac{4x}{1+x^2} & > -1. \end{cases}$$

La prima disequazione ha per soluzioni $]-\infty, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}, +\infty[$. Per disparità le soluzioni del sistema, cioè i valori di x in cui la serie converge assolutamente, sono

$$]-\infty, -2-\sqrt{3}[\cup]-2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}, +\infty[,$$

mentre il termine generale non è infinitesimo per i valori di x appartenenti all'insieme

$$]-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}[\cup]2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}[.$$

Resta da studiare la convergenza della serie nei punti $x_1 := -2-\sqrt{3}$, $x_2 := -2+\sqrt{3}$, $x_3 := 2-\sqrt{3}$, $x_4 := 2+\sqrt{3}$, nei quali $\sqrt[n]{|a_n(x)|} \to 1$ e quindi il criterio della radice non dà informazioni. Per $x = x_1, x_2$ il termine generale della serie risulta essere $(-1)^n/(n+1)$ e quindi la serie converge per il criterio di Leibniz, ma non converge assolutamente perché il termine generale, in modulo, è asintotico al termine generale della serie armonica, $1/n$, che diverge. Per $x = x_3, x_4$ il termine generale è $1/(n+1)$ e quindi la serie non converge.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\, dx.$$

Svolgimento. Detta f l'integranda, essa è definita (e continua) per $e^x \neq 3$. Dunque $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\setminus\{\log 3\})$. In particolare $f \in \mathcal{C}([\log 8, +\infty[)$ e quindi è integrabile secondo Riemann in $[\log 8, +\infty[$. Per il calcolo dell'integrale calcoliamo anzitutto una primitiva di $f(x) = \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}$. Sembra naturale il cambio di variabile $y = \sqrt{e^x+1}$, cioè $e^x = y^2-1$, $x = \log(y^2-1)$, $dx = \frac{2y}{y^2-1}\, dy$ da cui

$$\int \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\, dx = \int \frac{y}{y^2-4}\frac{2y}{y^2-1}\, dy = 2\int \frac{y^2-1+1}{(y^2-4)(y^2-1)}\, dy = 2\left(\int \frac{1}{y^2-4}\, dy + \int \frac{1}{(y^2-4)(y^2-1)}\, dy\right).$$

Evidentemente

$$\int \frac{1}{y^2-4}\, dy = \int \frac{1}{(y-2)(y+2)}\, dy = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right)\, dy = \frac{1}{4}\log\left|\frac{y-2}{y+2}\right|,$$

mentre

$$\int \frac{1}{(y^2-4)(y^2-1)}\, dy = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{y^2-4} - \frac{1}{y^2-1}\right)\, dy = \frac{1}{12}\log\left|\frac{y-2}{y+2}\right| - \frac{1}{6}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|$$

e quindi, in conclusione

$$\int \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\, dx = \frac{2}{3}\log\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-2}{\sqrt{e^x+1}+2}\right| - \frac{1}{3}\log\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| =: F(x).$$

Ora $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ come facilmente si verifica, per cui

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\, dx = -F(\log 8) = -\left(\frac{2}{3}\log\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\log 5 - \frac{1}{3}\log 2.$$

Esercizio 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{2z+1}{2z-1}\right)^3 = 1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.
Svolgimento. Le tre radici cubiche di 1 sono $1, e^{\frac{2}{3}\pi i}, e^{-\frac{2}{3}\pi i}$. L'equazione è equivalente alle tre equazioni

$$\frac{2z+1}{2z-1} = 1,\ \frac{2z+1}{2z-1} = e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{2z+1}{2z-1} = e^{-\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

La prima equazione non ha soluzioni. La seconda è equivalente all'equazione

$$2z + 1 = (2z-1)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i),$$

che ha per soluzioni

$$z = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{3 - i\sqrt{3}} = -i\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

La terza equazione è equivalente all'equazione

$$2z + 1 = (2z-1)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i),$$

che ha per soluzioni

$$z = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{3 + i\sqrt{3}} = i\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f \in C([0,1])$ una funzione continua. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx.$$

Svolgimento. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e osserviamo che $f \in \mathcal{C}(\left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right])$. Dunque possiamo applicare il teorema della media integrale alla funzione f nell'intervallo $\left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]$: esiste $\xi_n \in \left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]$ tale che

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx = f(\xi_n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Dato che $\xi_n \in \left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]$ per ogni n, otteniamo che $\lim_n \xi_n = 0$ e dato che f è continua in 0, si ha che $\lim_n f(\xi_n) = f(0)$. Quindi

$$\lim_n n \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx = \lim_n \left[f(\xi_n)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = f(0).$$

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin\sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{2}}.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.

4) Calcolare i limiti significativi di f'.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. Per la presenza del log dobbiamo porre $x > 0$, inoltre per la radice dobbiamo porre $1-\frac{\log^2 x}{2} \geq 0$ e per l'arcsin abbiamo $1 - \frac{\log^2 x}{2} \leq 1$. Risolvendo otteniamo che il dominio è dato da

$$\mathcal{D} = \left\{x \in \left[\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}, \mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right]\right\}$$

Poiché l'argomento di arcsin è non negativo anche la funzione è non negativa nel suo dominio.
2) Essendo la funzione una composizione di funzioni continue è continua nel suo dominio. Per la derivabilità possiamo solo affermare che la funzione è derivabile in $\mathcal{D}' = \left(\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}, \mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right) \setminus \{1\}$. Il punto 1 deve essere tolto per la presenza dell'arcsin, gli estremi del dominio per la radice.
3) Per ogni $x \in \mathcal{D}'$ un calcolo diretto porge

$$f'(x) = -\frac{\text{segno}(\log x)}{x\sqrt{2 - \log^2 x}}$$

Il segno è quindi deciso dalla funzione segno$(\log x)$. La funzione è crescente in $\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}, 1\right]$ ed è decrescente in $\left[1, \mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right]$. Il punto $x_1 = 1$ è un punto di massimo (assoluto), i punti $x_2 = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$ e $x_3 = \mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ sono punti di minimo (assoluto).
4) come descritto nel punto 2) i limiti significativi di f' sono:

$$\lim_{x\to x_1^+} f'(x) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to x_1^-} f'(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to x_2^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_3^-} f'(x) = -\infty$$

Quindi il punto x_1 è un punto angoloso, i punti x_2 e x_3 sono punti di cuspide. Il grafico è perciò come in Figura 16.

Esercizio 2 Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{-8x}{4 + x^2}\right)^n.$$

Usiamo il criterio della radice, dal quale ricaviamo informazioni sia sulla convergenza assoluta che sull'andamento del termine generale. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \left|\frac{-8x}{4 + x^2}\right|^n} = \left|\frac{-8x}{4 + x^2}\right| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left|\frac{-8x}{4 + x^2}\right|$$

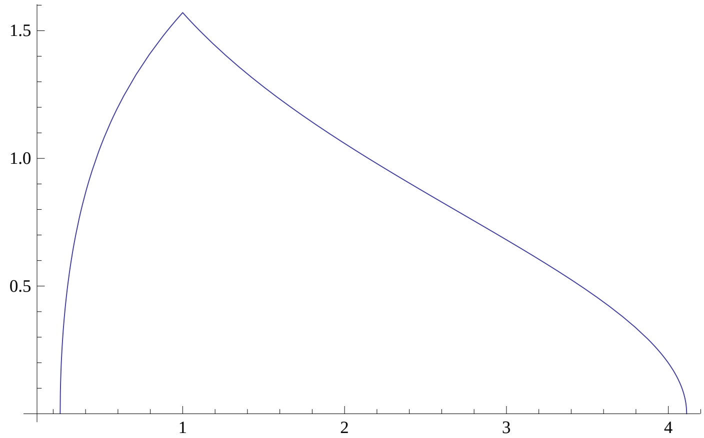


Figura 16: Il grafico di f (Tema 2).

Per il criterio della radice abbiamo convergenza assoluta (e quindi anche semplice) per ogni x per cui $\left|\frac{-8x}{4+x^2}\right| < 1$ cioè

$$\begin{cases} \frac{-8x}{4+x^2} < 1 \\ \\ \frac{-8x}{4+x^2} > -1 \end{cases}$$

Risolvendo il semplice sistema otteniamo convergenza assoluta (e quindi anche semplice) in

$$\mathcal{C} = \left(-\infty, -4-2\sqrt{3}\right) \bigcup \left(-4+2\sqrt{3}, 4-2\sqrt{3}\right) \bigcup \left(4+2\sqrt{3}, +\infty\right)$$

Il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie non converge in

$$\mathbb{R}\backslash\overline{\mathcal{C}} = \left(-4-2\sqrt{3}, -4+2\sqrt{3}\right) \bigcup \left(4-2\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}\right)$$

Rimane da studiare il comportamento della serie nei punti $x_1 = -4-2\sqrt{3}$, $x_2 = -4+2\sqrt{3}$, $x_3 = 4-2\sqrt{3}$ e $x_4 = 4+2\sqrt{3}$. Per $x = x_1$ o $x = x_2$ abbiamo che $\frac{-8x}{4+x^2} = 1$ e quindi il termine generico della serie diventa $\frac{1}{n}$ cioè la serie diverge a $+\infty$ in questi punti, mentre in $x = x_3$ o $x = x_4$ abbiamo che $\frac{-8x}{4+x^2} = -1$ e quindi il termine generico della serie diventa $(-1)^n \frac{1}{n}$. In tali punti abbiamo convergenza semplice (criterio di Leibniz), ma non assoluta.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\, dx.$$

Svolgimento. Detta f l'integranda, essa è definita (e continua) per ogni $x \geq 0$. In particolare $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$ e quindi è integrabile secondo Riemann in $[0, +\infty[$. Per il calcolo dell'integrale calcoliamo anzitutto una primitiva di $f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}$. Sembra naturale il cambio di variabile $y = \sqrt{e^x - 1}$, cioè $e^x = y^2 + 1$, $x = \log(y^2 + 1)$, $dx = \frac{2y}{y^2+1}\, dy$ da cui

$$\int \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\, dx = \int \frac{y}{y^2 + 4} \frac{2y}{y^2 + 1}\, dy = 2 \int \frac{y^2 + 4 - 4}{(y^2 + 4)(y^2 + 1)}\, dy = 2 \left(\int \frac{1}{y^2 + 1}\, dy - 4 \int \frac{1}{(y^2 + 4)(y^2 + 1)}\, dy \right).$$

Evidentemente

$$\int \frac{1}{y^2 + 1}\, dy = \arctan y,$$

mentre

$$\int \frac{1}{(y^2+4)(y^2+1)}\, dy = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+4} \right) = \frac{1}{3} \left(\arctan y - \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+(y/2)^2}\, dy \right)$$
$$= \frac{1}{3} \left(\arctan y - \frac{1}{2} \arctan \frac{y}{2} \right).$$

Pertanto

$$\int \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx = -\frac{2}{3} \arctan \sqrt{e^x-1} + \frac{4}{3} \arctan \frac{\sqrt{e^x-1}}{2} =: F(x).$$

Ora $F(0) = 0$ come facilmente si verifica, per cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\, dx = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{3}.$$

Esercizio 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{2z+1}{1-2z} \right)^3 = -1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

Svolgimento. Le tre radici cubiche di -1 sono $w_1 = -1$, $w_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ e $w_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. L'equazione è equivalente alle tre equazioni

$$\frac{2z+1}{1-2z} = -1, \quad \frac{2z+1}{1-2z} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{2z+1}{1-2z} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

La prima non ha soluzioni, la seconda ha come soluzione $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} i$, la terza ha come soluzione $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6} i$. Il grafico segue:

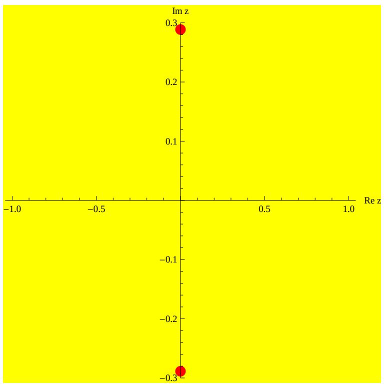


Figura 17: Le soluzioni di $\left(\frac{2z+1}{1-2z}\right)^3 = -1$ (Tema 2).

Appello del 20.02.2013

TEMA 1

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = x\left|3 + \frac{1}{\log(2x)}\right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnare un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. (a) Il dominio è $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \; \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty, \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

per cui $x = 1$ è un asintoto verticale. Siccome

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3, \; \lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log 2x} = +\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui.
(b) Siccome $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, la funzione è prolungabile con continuità in $x = 0$. È anche derivabile in tutti i punti del dominio in cui non si annulla l'argomento del modulo, cioè per x nel dominio, $x \neq \frac{e^{-1/3}}{2}$.
(c) Per tali x si ha:

$$f'(x) = \left|3 + \frac{1}{\log(2x)}\right| + x \operatorname{sign}\left(3 + \frac{1}{\log(2x)}\right) \frac{-1}{x\log^2(2x)}.$$

Siccome

$$3 + \frac{1}{\log(2x)} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{e^{-1/3}}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[,$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 3 + \frac{1}{\log(2x)} - \frac{1}{\log^2(2x)} = \frac{3\log^2(2x)+\log(2x)-1}{\log^2(2x)} & \text{per} \quad \left]0, \frac{e^{-1/3}}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\\ -3 - \frac{1}{\log(2x)} + \frac{1}{\log^2(2x)} = \frac{-3\log^2(2x)-\log(2x)+1}{\log^2(2x)} & \text{per} \quad x \in \left]\frac{e^{-1/3}}{2}, \frac{1}{2}\right[. \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione $3\log^2(2x) + \log(2x) - 1 = 0$ sono $e^{\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}}/2$ e si ha

$$\frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2} < \frac{e^{-1/3}}{2} < \frac{1}{2} < \frac{e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}}}{2},$$

per cui

x	$\left]0, \frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2}\right[$	$\left]\frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2}, \frac{e^{-1/3}}{2}\right[$	$\left]\frac{e^{-1/3}}{2}, \frac{1}{2}\right[$	$\left]\frac{1}{2}, \frac{e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}}}{2}\right[$	$\left]\frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2}, +\infty\right[$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

e quindi $\frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2}$ è un punto di massimo locale stretto, 0 e $\frac{e^{-1/3}}{2}$ sono punti di minimo assoluto, mentre $\frac{e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}}}{2}$ è un punto di minimo locale stretto.
(d) I limiti significativi di f' sono

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 3, \quad \lim_{x\to \frac{e^{-1/3}}{2}^-} f'(x) = -9, \quad \lim_{x\to \lim_{x\to \frac{e^{-1/3}}{2}^-} f'(x) = -3^+} f'(x) = 9,$$

per cui $\frac{e^{-1/3}}{2}$ è un punto angoloso.
(e) Il grafico è come in figura 18.

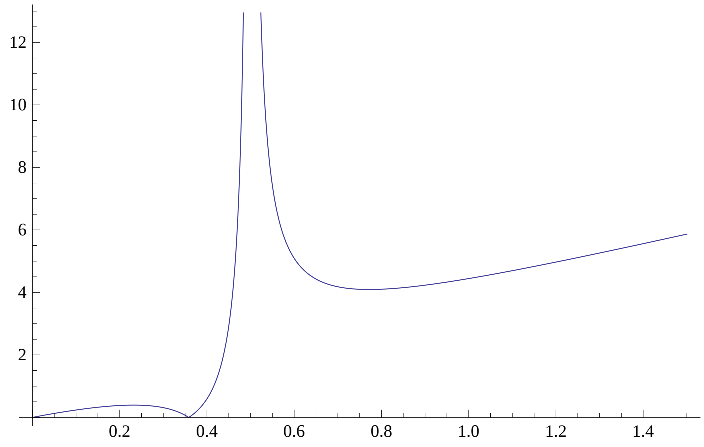


Figura 18: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{7/2}\,\log^2 x - 1 + \sin x^2 + \cos\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)}{\sinh x - x^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.
Svolgimento. Gli sviluppi di McLaurin danno, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
\sin x^2 &= x^2 + o(x^5),\\
\cos\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right) - 1 &= -\frac{1}{2}\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)^4 + o(x^4)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\,x + x^2 + o(x^2)\right)^2\\
&= -x^2 - \sqrt{2}\,x^3 + o(x^3),\\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4),\\
x^{7/2}\,\log^2 x &= o(x^3).
\end{aligned}$$

Perciò il numeratore è

$$-\sqrt{2}\,x^3 + o(x^3), \quad x \to 0,$$

mentre il denominatore, per $x \to 0$, è

$$\begin{aligned}
x^\alpha + o(x^\alpha) &\ \text{ se } \ 0 < \alpha < 1\\
\frac{x^3}{6} + o(x^3) &\ \text{ se } \ \alpha = 1\\
x + o(x) &\ \text{ se } \ \alpha > 1.
\end{aligned}$$

Si ha perciò

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{7/2}\,\log^2 x - 1 + \sin x^2 + \cos\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)}{\sinh x - x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sqrt{2}\,x^3 + o(x^3)}{\sinh x - x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha \neq 1\\ -6\sqrt{2} & \text{se} \quad \alpha = 1.\end{cases}$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sin \frac{1}{x} \, dx$$

Svolgimento. Con la sostituzione $y = 1/x$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sin \frac{1}{x} \, dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^{b} \frac{1}{x^4} \sin \frac{1}{x} \, dx \\
&= - \lim_{b \to +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{b}} y^2 \sin y \, dy = \lim_{c \to 0^+} \int_{c}^{\frac{\pi}{2}} y^2 \sin y \, dy \\
&= -y^2 \cos y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2y \cos y \, dy \\
&= 2y \sin y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy \\
&= \pi - 2.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Risolvere l'equazione

$$\left| z^2 \big(z - \overline{(z - 4i)} \big) \right| = \left| z\overline{z} - z(z - 4i) \right|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.
Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}
\left| z^2 \big(z - \overline{(z - 4i)} \big) \right| &= |z| \left| z \big(z - \overline{(z - 4i)} \big) \right| = |z| \left| z \big(z - (\overline{z} + 4i) \big) \right| = |z| \left| z(2i \, \mathrm{Im} z - 4i) \right| \\
\left| z\overline{z} - z(z - 4i) \right| &= |z| \left| \overline{z} - (z - 4i) \right| = |z| \left| 4i - 2i \, \mathrm{Im} z \right|,
\end{aligned}$$

per cui $z = 0$ è una soluzione. Se $z \neq 0$ l'equazione diventa

$$|z| \left| \mathrm{Im} z - 2 \right| = \left| \mathrm{Im} z - 2 \right|,$$

che ha per soluzioni $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z = 2\}$. Le soluzioni sono in figura 2.2.

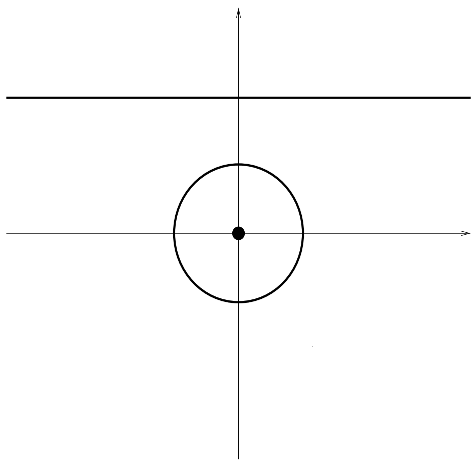


Figura 19: Le soluzioni dell'esercizio 4 (Tema 1).

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua e crescente. Sia

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt, \quad x > 0.$$

Si provi che g è crescente.
Svolgimento. La funzione g è derivabile e si ha

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2} \int_0^x f(t)\, dt + \frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - g(x)\big).$$

Per il teorema della media integrale, per ogni $x > 0$ esiste $\xi_x \in [0, x]$ tale che $g(x) = f(\xi_x)$. Siccome f è crescente, ne segue che $g(x) \leq f(x)$, per cui $g'(x) \geq 0$.

TEMA 2

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = x \left| 2 - \frac{1}{\log(3x)} \right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnarne un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).
Svolgimento.

(a) Il dominio è dato da $x > 0$ (per la presenza del log) e $3x \neq 0$ (perché log è al denominatore). Quindi chiamando $\mathcal{D}$ il dominio abbiamo

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \setminus \{\frac{1}{3}\}.$$

Per quanto riguarda il segno è evidente che $f \geq 0$ sul dominio. Limiti notevoli: si calcola facilmente che

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{possibili asintoti obliqui}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = -\infty$$

Quindi non ci sono asintoti obliqui, né orizzontali ma un asintoto verticale in $x = 1/3$.

(b) Come visto nel punto (a) c'è un prolungamento per continuità in $x = 0$ ponendo la funzione f uguale a 0 nel punto 0. Con questo prolungamento la funzione è continua in

$$\mathcal{A} = \mathcal{D} \cup \{0\}.$$

Per il calcolo della derivata prima per la presenza del valore assoluto dobbiamo porre $2 - \dfrac{1}{\log 3x} \neq 0$ cioè $x \neq \dfrac{\sqrt{e}}{3} = x_1$. Nota che $f(x_1) = 0$ e quindi per quanto detto x_1 è un punto di minimo assoluto.

(c) e (d) Un calcolo diretto mostra che $\forall x \in \mathcal{D}\backslash\{x_1\}$

$$f'(x) = \left|2 - \frac{1}{\log 3x}\right| + x\text{segno}\left(2 - \frac{1}{\log 3x}\right) \cdot \frac{1}{\log^2 3x}\frac{1}{x} = \left|2 - \frac{1}{\log 3x}\right| + \text{segno}\left(2 - \frac{1}{\log 3x}\right) \cdot \frac{1}{\log^2 3x}$$

Poiché per definizione di x_1 l'argomento del valore assoluto si annulla e segno$\left(2 - \frac{1}{\log 3x}\right) = 1$ se $x \in \left(0, \dfrac{1}{3}\right) \bigcup (x_1 + \infty) = \mathcal{P}$ e segno$\left(2 - \frac{1}{\log 3x}\right) = -1$ se $x \in \left(\frac{1}{3}, x_1\right) = \mathcal{N}$ abbiamo l'attacco di f in x_1

$$\lim_{x \to x_1^{\pm}} f'(x) = \pm 4$$

x_1 è quindi un punto di minimo assoluto e punto angoloso. Vediamo anche l'attacco (destro) in 0. Si ottiene subito che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2$$

e quindi il prolungamento in 0 è anche $\mathcal{C}^1$. Il punto 0 è un altro punto di minimo assoluto.

Per quanto riguarda il segno è evidente che se $x \in \mathcal{P}$ $f'(x) > 0$ e quindi la funzione è qui monotona strettamente crescente. Per $x \in \mathcal{N}$ si vede con un breve calcolo che $f'(x) < 0$ e quindi la funzione è in questo insieme strettamente monotona decrescente.

(e) Il grafico segue:

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x^2 + \cos\log(1 + \sqrt{2}x) - 1 + x^{13/4}\ \log^2 x}{\sin x - x^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.
Svolgimento. Sviluppiamo i termini al numeratore $\sin x^2 = x^2 + o(x^5)$,

$$\cos\log(1 + \sqrt{2}x) = \cos\left(\sqrt{2}x - x^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x^3 + o(x^3)\right) = 1 - x^2 + \sqrt{2}x^3 + o(x^3)$$

Notiamo inoltre che $x^{13/4}\ \log^2 x = o(x^3)$ e quindi il numeratore diventa uguale a $\sqrt{2}x^3$ e quindi se $\alpha < 1$ oppure $\alpha > 1$ il limite vale 0. Se $\alpha = 1$ allora il denominatore diventa $-\dfrac{x^3}{6}$ e quindi per il PSI il limite per $\alpha = 1$ vale $-6\sqrt{2}$.
Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \cos\frac{1}{x}\, dx$$

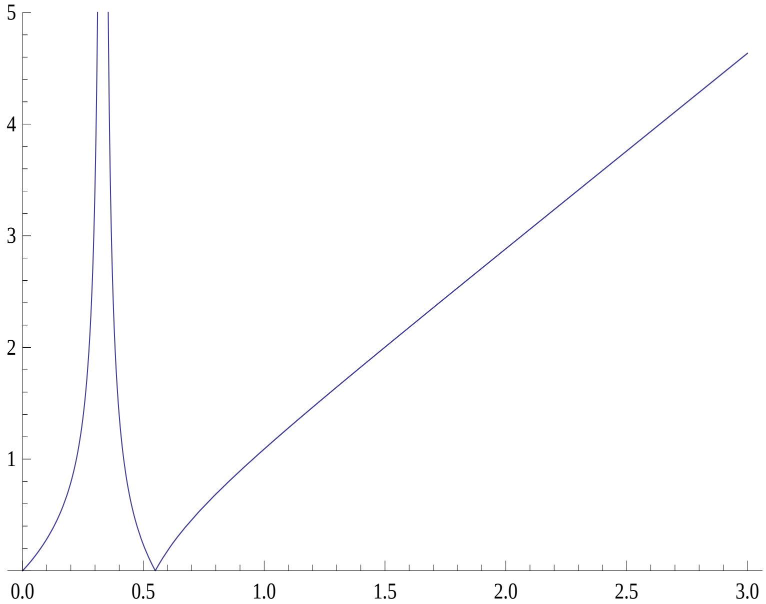


Figura 20: Il grafico di $f(x) = x\left|2 - \frac{1}{\log(3x)}\right|$ (Tema 2).

Svolgimento. Integriamo prima per sostituzione ponendo $\frac{1}{x} = t$ l'integrale diventa allora

$$\int_0^\pi t^2 \cos t \, dt$$

Integrando due volte per parti abbiamo

$$\int t^2 \cos t \, dt = 2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t$$

Sostituendo gli estremi di integrazione otteniamo

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \cos \frac{1}{x} \, dx = \int_0^\pi t^2 \cos t \, dt = -2\pi$$

Esercizio 4 Risolvere l'equazione

$$|z^2\big(z - \overline{(z-2i)}\big)| = |z\overline{z} - z(z-2i)|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.
Svolgimento. Scrivendo $z = x + iy$ e svolgendo alcuni semplici calcoli otteniamo che il primo membro diventa

$$2|y-1|(x^2+y^2)$$

mentre il secondo diventa

$$2\sqrt{x^2+y^2}|y-1|$$

Perciò l'equazione di partenza diventa

$$|y-1|\sqrt{x^2+y^2} = |y-1|(x^2+y^2)$$

Quindi se $y \neq 1$ e $z \neq 0$ l'equazione diventa equivalente a $x^2+y^2=1$ che è l'equazione di una circonferenza di raggio 1 senza il punto $y=1$. Se $y=1$ l'equazione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ infine abbiamo la soluzione $z=0$. Ricapitolando, le soluzioni sono $z=x+i$ e $z=cos\theta+i\sin\theta$ con $\theta \in [0,2\pi)$ e $z=0$. Il grafico segue:

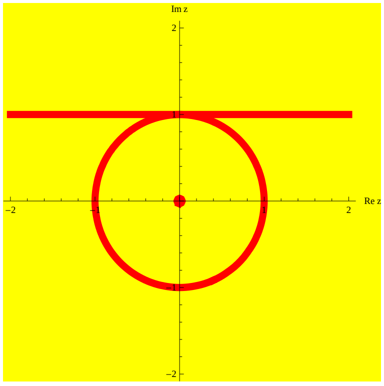


Figura 21: Le soluzioni di $\left|z^2\big(z-\overline{(z-2i)}\big)\right| = \left|z\bar{z}-z(z+2i)\right|$ (Tema 2).

Appello del 15.07.2013

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\cosh x - \log|\sinh x - 1|.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.

4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento.

1) Il dominio della funzione è dato da $\sinh x \neq 1$ cioè $x \neq \log\left(1+\sqrt{2}\right)$. Per quanto riguarda il segno, la funzione è positiva se e solo se $\log\dfrac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} > 0$ quindi se e solo se $\dfrac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} > 1$ che è equivalente a $\mathrm{e}^{2x}+1 > |\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 1|$. Per $x > \log(1+\sqrt{2})$ la disuguaglianza è evidente e quindi la funzione è positiva. Per $x < \log(1+\sqrt{2})$ la disuguaglianza sopra diventa $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ cioè $x > 0$. In definitiva $f(x) > 0$ se e solo se $x > 0$.

2) Vediamo i limiti significativi. È immediato vedere che

$$\lim_{x\to\log(1+\sqrt{2})} f(x) = +\infty$$

abbiamo ora

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{e^{2x}+1}{|e^{2x}-2e^x-1|}\right) = 0$$

perché sia a $+\infty$ che a $-\infty$ l'argomento del log tende a 1. Per quanto calcolato la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale, mentre la retta $x = \log(1+\sqrt{2})$ è asintoto verticale completo.

3) La funzione è evidentemente (continua e) derivabile nel suo dominio, cioè in $\dfrac{\mathbb{R}}{\log(1+\sqrt{2})}$. Un calcolo facile mostra che

$$f'(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{\cosh x)}{\sinh x - 1} = \frac{1+\sinh x}{\cosh x(1-\sinh x)}$$

Per $x > \log(1+\sqrt{2})$, evidentemente $f'(x) < 0$ e quindi la funzione è decrescente (strettamente). Per $x \in \big(0, \log(1+\sqrt{2})\big)$ è sempre evidente che $f'(x) > 0$ e quindi la funzione è crescente, Per $x < 0$ il segno è determinato da $1 + \sinh x$. E perciò la funzione è crescente se e solo se $e^{2x} + 2e^x - 1 > 0$ cioè $x \in (\log(\sqrt{2}-1), 0)$. Perciò $x = \log(\sqrt{2}-1)$ è un punto di minimo (assoluto).

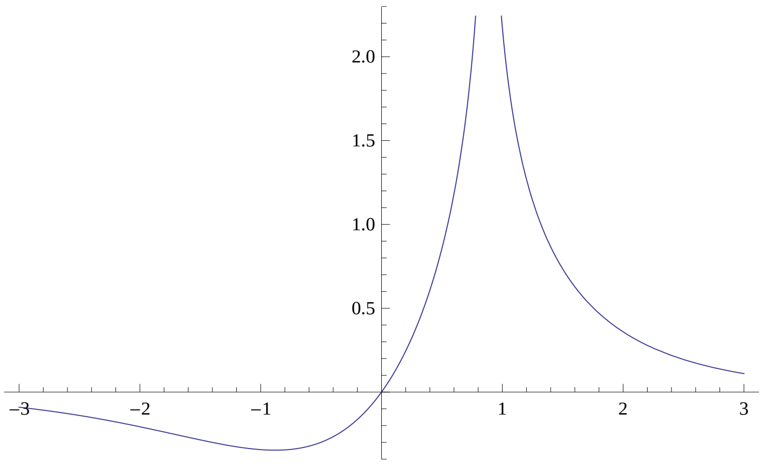


Figura 22: Grafico funzione $f(x) = \log\cosh x - \log|\sinh x - 1|$. .

Esercizio 2
a) Dato il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0, \tag{1}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \Big(n^2 + \log(n!) + \cos n\Big)\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1)\right).$$

b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).
Svolgimento. Si ha

$$\log(n!) = \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 2 = \sum_{k=1}^{n} \log k \le n\log n.$$

Siccome $\log n = o(n)$ per $n \to \infty$, allora $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0$.
Da (1) e dal fatto che $\cos n$ è limitato, e quindi $\cos n = o(n^2)$ per $n \to \infty$, si ha subito che

$$n^2 + \log(n!) + \cos n \sim n^2 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Si ha inoltre, per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

siccome $\log n/n^3 = o(n^3)$. Analogamente, si ha

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{\log n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

per $n \to \infty$. Quindi

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

per $n \to \infty$. In sintesi, si ha

$$\begin{aligned}\left(n^2 + \log(n!) + \cos n\right)\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1)\right) &= \left(n^2 + o(n^2)\right)\left(\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\to 2 \quad \text{per } n \to \infty.\end{aligned}$$

Esercizio 3
a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2x} + 1}dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Calcolarlo per $\alpha = 1/2$.
Svolgimento. a) L'integranda è continua ed ha segno costante in $[0, +\infty)$, per cui la convergenza può essere studiata mediante il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to +\infty$, se $\alpha > 0$,

$$\frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2x} + 1} \sim \frac{1}{e^{2(1-\alpha)x}}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2(1-\alpha)x}}dx < +\infty$$

se e solo se $\alpha < 1$. Per $\alpha \leq 0$ si ha $\frac{|e^{2\alpha x}-1|}{e^{2x}+1} \leq \frac{1}{e^{2x}}$. Quindi l'integrale richiesto converge se e solo se $\alpha < 1$.
b) Ponendo $\log t = x$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}dx = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{(t^2+1)t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+t}dt.$$

Utilizzando la scomposizione

$$\frac{t-1}{t^3+t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{-1}{t} + \frac{t+1}{t^2+1},$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+t} dt &= \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t} + \frac{t+1}{t^2+1}\, dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t} + \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\, dt \\
&= \lim_{t\to+\infty} \log \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} - \frac{\log 2}{2} + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 = -16\overline{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

Svolgimento. Poniamo $z = \rho e^{i\vartheta}$. Chiaramente $z = 0$ è una soluzione, per cui cerchiamo le soluzioni non nulle. Prendendo il modulo di entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$\rho^5 = 16\rho,$$

da cui $\rho = 2$, cioè $z = 2e^{i\vartheta}$. Quindi

$$2^5 e^{5i\vartheta} = 2^4 e^{i\pi} 2e^{-i\vartheta},$$

da cui

$$e^{6i\vartheta} = e^{i\pi},$$

cioè

$$\vartheta = \pi/6 + k\pi/3, \quad k = 0, \ldots, 5.$$

Quindi le soluzioni non nulle dell'equazione sono

$$\begin{aligned}
2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i,\ 2e^{i\pi/2} = 2i,\ 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i, \\
2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i,\ 2e^{3i\pi/2} = -2i,\ 2e^{i11\pi/6} = \sqrt{3} - i
\end{aligned}$$

(v. figura).

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log|\sinh x - 2| - \log\cosh x.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

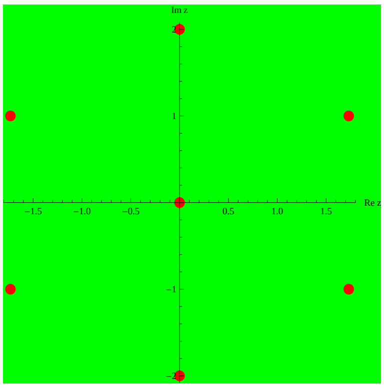


Figura 23: Soluzione esercizio 4 Tema 1.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.

4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} : \sinh x \neq 2\}$. Risolvendo l'equazione

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2$$

si ottiene

$$e^{2x} - 4e^x - 1 = 0,$$

la cui unica soluzione è $\log(2 + \sqrt{5})$. Il dominio pertanto è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \log(2 + \sqrt{5})\}$.
Il segno di f è positivo, per $x > \log(2 + \sqrt{5})$, se e solo se

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} - 2 \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

cioè mai. Per $x < \log(2 + \sqrt{5})$ invece il segno è positivo se e solo se

$$2 - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

cioè se e solo se $x \leq \log 2$ (che è $< \log(2 + \sqrt{5})$).
Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2} - 2}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \to +\infty} \log \frac{e^x - e^{-x} - 4}{e^x + e^{-x}} = \log 1 = 0,$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \log \frac{2 - \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \to -\infty} \log \frac{4 - e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \log 1 = 0,$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Infine si ha

$$\lim_{x \to \log(2+\sqrt{5})} f(x) = -\infty,$$

cioè $x = \log(2+\sqrt{5})$ è asintoto verticale.
La funzione è visibilmente derivabile in tutto il dominio e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\cosh x}{\sinh x - 2} - \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x + 2\sinh x}{(\sinh x - 2)\cosh x} = \frac{1+2\sinh x}{(\sinh x - 2)\cosh x} & \text{per } x > \log(2+\sqrt{5}) \\ \frac{-\cosh x}{2-\sinh x} - \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{1+2\sinh x}{(\sinh x-2)\cosh x} & \text{per } x < \log 2 + \sqrt{5}). \end{cases}$$

Il segno di f' è visibilmente positivo per $x > \log(2+\sqrt{5})$, mentre per $x < \log(2+\sqrt{5})$ è negativo se e solo se $1 + 2\sinh x < 0$, cioè se e solo se $x > \log(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$. Quindi $x = \log(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ è un punto di massimo locale stretto. Il grafico è come in figura.

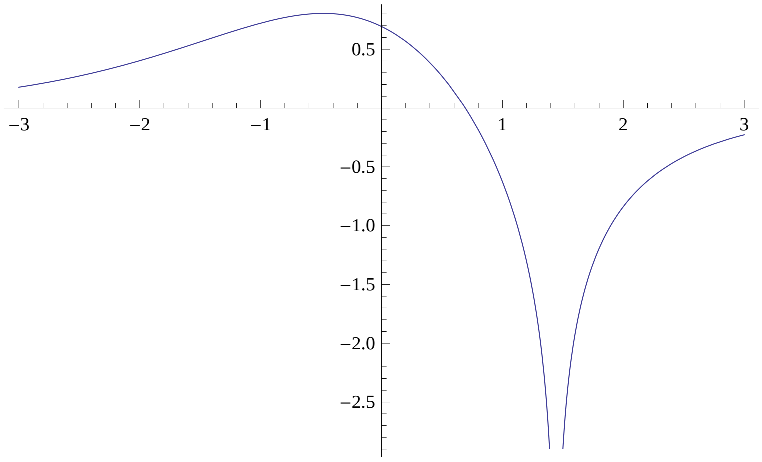


Figura 24: Grafico funzione $f(x) = \log|\sinh x - 2| - \log\cosh x$. .

Esercizio 2
a) Dato il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0, \tag{1}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 + \log(n!) + \sin n\right)\left(\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1)\right).$$

b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).
Svolgimento. Si ha

$$\log(n!) = \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 2 = \sum_{k=1}^{n} \log k \leq n\log n.$$

Siccome $\log n = o(n)$ per $n \to \infty$, allora $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0$.
Da (1) e dal fatto che $\sin n$ è limitato, e quindi $\sin n = o(n^2)$ per $n \to \infty$, si ha subito che

$$n^2 + \log(n!) + \sin n \sim n^2 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Si ha inoltre, per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) &= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{\log n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

siccome $\log n/n^3 = o(n^3)$. Analogamente, si ha

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

per $n \to \infty$. Quindi

$$\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) = -\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

per $n \to \infty$. In sintesi, si ha

$$\begin{aligned}\left(n^2 + \log(n!) + \sin n\right)\left(\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1)\right) &= \left(n^2 + o(n^2)\right)\left(-\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\to -2 \quad \text{per } n \to \infty.\end{aligned}$$

Esercizio 3
a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 - e^{\alpha x}}{e^{2x} + 3} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Calcolarlo per $\alpha = 1$.
Svolgimento. a) L'integranda è continua ed ha segno definitivamente costante per $x \to +\infty$), per cui la convergenza può essere studiata mediante il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to +\infty$ e $\alpha > 0$,

$$\frac{3 - e^{\alpha x}}{e^{2x} + 3} \sim \frac{-1}{e^{(2-\alpha)x}}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(2-\alpha)x}} dx < +\infty$$

se e solo se $\alpha < 2$. Per $\alpha \le 0$ si ha $\frac{3 - e^{\alpha x} -}{e^{2x}+3} \le \frac{1}{e^{2x}}$. Quindi l'integrale richiesto converge se e solo se $\alpha < 2$.
b) Ponendo $t = \log x$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 - e^x}{e^{2x} + 3} dx = \int_1^{+\infty} \frac{3 - t}{(t^2 + 3)t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{3 - t}{t^3 + 3t} dt.$$

Utilizzando la scomposizione

$$\frac{3 - t}{t^3 + 3t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 3} = \frac{1}{t} - \frac{t + 1}{t^2 + 3},$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{3 - t}{t^3 + 3t} dt &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{t+1}{t^2 + 3}\, dt\\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2 + 3} - \frac{1}{t^2 + 3}\, dt\\ &= \lim_{t \to +\infty} \log \frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} + \log 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}\\ &= \log 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = -2(1+\sqrt{3}i)\overline{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.
Svolgimento. Poniamo $z = \rho e^{i\vartheta}$. Chiaramente $z = 0$ è una soluzione, per cui cerchiamo le soluzioni non nulle. Prendendo il modulo di entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$\rho^3 = 4\rho,$$

da cui $\rho = 2$, cioè $z = 2e^{i\vartheta}$. Quindi

$$2^3 e^{3i\vartheta} = 4e^{4i\pi/3} 2e^{-i\vartheta},$$

da cui

$$e^{4i\vartheta} = e^{4i\pi/3},$$

cioè

$$\vartheta = \pi/3 + k\pi/2, \quad k = 0, \dots, 3.$$

Quindi le soluzioni non nulle dell'equazione sono

$$2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3},\ 2e^{5i\pi/6} = -\sqrt{3} + i,$$
$$e^{i4\pi/3} = -1 - i\sqrt{3}, e^{i11\pi/6} = \sqrt{3} - i$$

(v. figura).

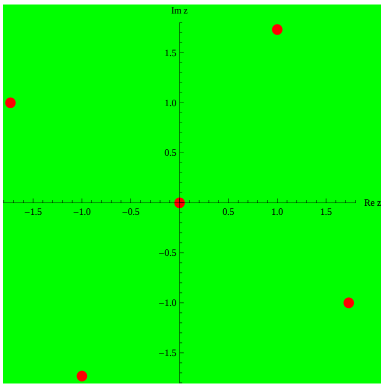


Figura 25: Soluzione esercizio 4 Tema 2.

Appello del 16.09.2013

TEMA 1

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 4x + 3|},$$

(a) determinarne il segno ed eventuali asintoti;
(b) studiarne la derivabilità e calcolare f';

(c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnare un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).
Svolgimento. (a) Il dominio di f è banalmente la retta reale. Per studiare il segno di f si deve risolvere la disequazione

$$2x \geq \sqrt{|x^2 - 4x + 3|}.$$

Quest'ultima non può avere soluzioni negative, per cui, elevando al quadrato per $x \geq 0$ si ottiene la disequazione equivalente

$$4x^2 \geq |x^2 - 4x + 3|,$$

che a sua volta equivale a

$$\begin{aligned} &3x^2 + 4x - 3 \geq 0, \qquad &&\text{per } 0 \leq x \leq 1 \text{ o } x \geq 3 \\ &5x^2 - 4x + 3 \geq 0, \qquad &&\text{per } 1 < x < 3. \end{aligned}$$

Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq (\sqrt{13} - 2)/3$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 4x - 3}{2x + \sqrt{x^2 - 4x + 3}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x + 3}{x + \sqrt{x^2 - 4x + 3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4 + 3/x}{1 + \sqrt{1 - 4/x + 3/x^2}} = 2,$$

per cui la retta $y = x + 2$ è un asintoto obliquo per f per $x \to +\infty$. Analogamente si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x + 4 - 3/x}{2x - x\sqrt{1 - 4/x + 3/x^2}} = 3$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x + 3}{-x - x\sqrt{1 - 4/x + 3/x^2}} = -2,$$

per cui $y = 3x - 2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
(b) f è derivabile se e solo se l'argomento del modulo (e quindi della radice) non è nullo, cioè se e solo se $x \neq 1, 3$. Per $x < 1$ o $x > 3$ si ha

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}},$$

mentre per $1 < x < 3$ si ha

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{-x^2 + 4x - 3} + x - 2}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}.$$

(c) Il segno di f' è dato dal segno del numeratore. Nel primo caso il segno è banalmente positivo per $x < 1$, mentre elevando al quadrato per $x > 3$, si ottiene che il segno è positivo se e solo se

$$3x^2 - 12x + 8 \geq 0,$$

cioè per $x \geq (6+\sqrt{12})/3$, che pertanto è un punto di minimo locale stretto. Nel secondo caso, il segno è certamente positivo se $2 \leq x < 3$, mentre elevando al quadrato per $1 < x < 2$ si ottiene che il segno è positivo se e solo se

$$5x^2 - 20x + 16 \leq 0,$$

cioè se e solo se $2 \geq x \geq 2(1-1/\sqrt{5})$. Quest'ultimo è quindi un punto di minimo relativo stretto.
(d) Si ha

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = +\infty = \lim_{x\to 3-} f'(x),$$

mentre

$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = -\infty = \lim_{x\to 3+} f'(x).$$

Quindi $x = 1$ e $x = 3$ sono punti di cuspide e punti di massimo relativo stretto.
(e) Il grafico è come in figura.

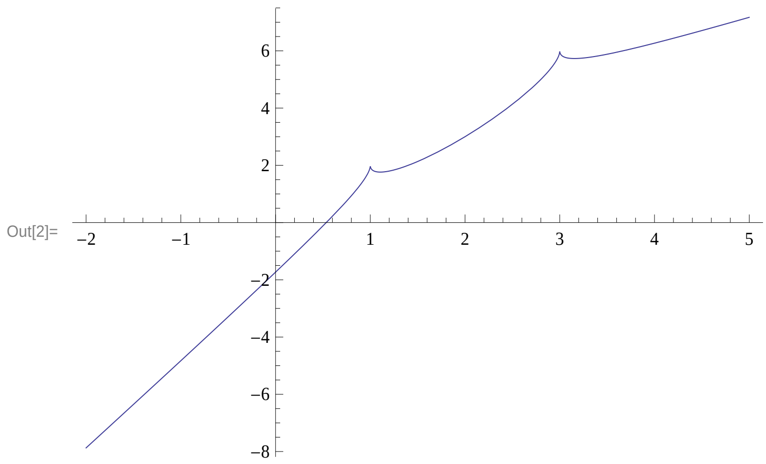


Figura 26: Grafico funzione $f(x) = 2x - \sqrt{|x^2-4x+3|}$.

Esercizio 2 Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n\big(e^{\frac{1}{n}}-1\big) - \frac{\alpha}{n}\right).$$

Svolgimento. Applichiamo il confronto asintotico. Ricordiamo che

$$e^x = 1 + x + o(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \log(1+x) = x + o(x),$$

per cui

$$a_n := \log\left(n(e^{\frac{1}{n}}-1) - \frac{\alpha}{n}\right) = \log\left(n\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)-\frac{\alpha}{n}\right) = \log\left(1+o(1)-\frac{\alpha}{n}\right) = \log(1+o(1)),$$

che però non è sufficiente a stabilire il comportamento asintotico. Allunghiamo lo sviluppo dell'esponenziale:

$$a_n = \log\left(n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)-\frac{\alpha}{n}\right) = \log\left(1+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Se $\frac{1}{2} - \alpha \neq 0$ allora $a_n \sim \frac{\frac{1}{2}-\alpha}{n}$ e quindi la serie diverge per confronto asintotico. Se $\alpha = \frac{1}{2}$ ancora non possiamo dire nulla. Allungando ulteriormente lo sviluppo dell'esponenziale

$$a_n = \log\left(n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)-1\right)-\frac{1}{2n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{1}{6n^2}.$$

Dunque la serie converge assolutamente per confronto asintotico.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x+3}}$$

Svolgimento. Procediamo per parti: osservato che $\frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2\left(\sqrt{x+3}\right)'$ abbiamo

$$\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x+3}}\,dx = 2\sqrt{x+3}\log(x-1) - 2\int \sqrt{x+3}\frac{1}{x-1}\,dx.$$

Calcoliamo per sostituzione quest'ultima primitiva ponendo $y = \sqrt{x+3}$, $x = y^2-3$, $dx = 2ydy$ da cui

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}\,dx &= \int \frac{y}{y^2-4}2y\,dy = 2\int \frac{y^2}{y^2-4}\,dy = 2\int\left(1+\frac{4}{y^2-4}\right) = 2y + 2\int \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\\ &= 2y + 2\log\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 2\sqrt{x+3} + 2\log\left|\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+3}+2}\right|.\end{aligned}$$

Da cui

$$\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x+3}}\,dx = 2\sqrt{x+3}\log(x-1) - 4\sqrt{x+3} - 4\log\left|\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+3}+2}\right| + c, c\in\mathbb{R}.$$

In alternativa si può operare subito la sostituzione $x+3 = y^2$, che dà

$$\begin{aligned}\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x+3}}dx &= 2\int \log(y^2-4)\,dy = 2y\log(y^2-4) - 4\int \frac{y^2}{y^2-4}dy\\ &= 2y\log(y^2-4) - 4y - 16\int \frac{1}{y^2-4}dy\\ &= 2y\log(y^2-4) - 4y - 4\log\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + c, c\in\mathbb{R}\\ &= 2\sqrt{x+3}\log(x-1) - 4\sqrt{x+3} - 4\log\left|\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+3}+2}\right| + c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Rappresentare le soluzioni della disequazione

$$\left||z-1|^2 - \left|\frac{z-\overline{z}}{2}\right|^2 - 1\right| \geq \mathrm{Im}z - 3$$

nel piano complesso.

Svolgimento. Poniamo $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. La disequazione diventa allora

$$\left|(x-1)^2 + y^2 - \left|\frac{2iy}{2}\right|^2 - 1\right| \geq y - 3,$$

cioè

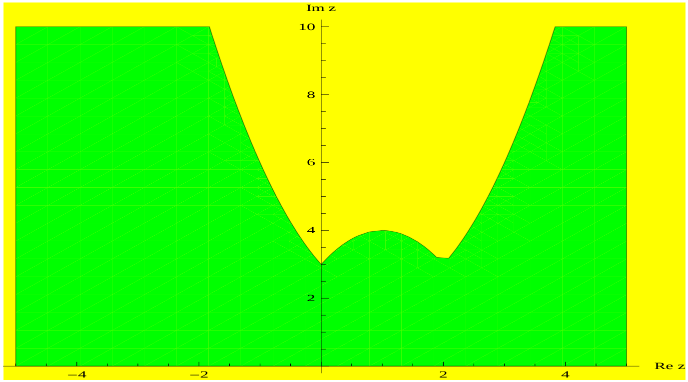
$$\left|x^2 - 2x\right| \geq y - 3.$$

Posto

$$g(x) = \left|x^2 - 2x\right| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{per } x < 0 \text{ o per } x > 2 \\ 2x - x^2 & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

l'insieme delle soluzioni della disequazione è costituito dai punti (x, y) del piano tali che $y \leq g(x) + 3$ (v. figura, la soluzione è in verde).

Out[57]=



TEMA 2

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 5x + 6|},$$

(a) determinarne il segno ed eventuali asintoti;
(b) studiarne la derivabilità e calcolare f';
(c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnare un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. (a) Il dominio di f è banalmente la retta reale. Per studiare il segno di f si deve risolvere la disequazione

$$2x \geq \sqrt{|x^2 - 5x + 6|}.$$

Quest'ultima non può avere soluzioni negative, per cui, elevando al quadrato per $x \geq 0$ si ottiene la disequazione equivalente

$$4x^2 \geq |x^2 - 5x + 6|,$$

che a sua volta equivale a

$$\begin{aligned} &3x^2 + 5x - 6 \geq 0, && \text{per } 0 \leq x \leq 2 \text{ o } x \geq 3 \\ &5x^2 - 5x + 6 \geq 0, && \text{per } 2 < x < 3. \end{aligned}$$

Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq (\sqrt{97} - 5)/6$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 5x - 6}{2x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-6}{x+\sqrt{x^2-5x+6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-6/x}{1+\sqrt{1-5/x+6/x^2}}=\frac{5}{2},$$

per cui la retta $y=x+5/2$ è un asintoto obliquo per f per $x\to+\infty$. Analogamente si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+5-6/x}{2x-x\sqrt{1-5/x+6/x^2}}=3$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-3x=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-6}{-x-x\sqrt{1-5/x+6/x^2}}=-\frac{5}{2},$$

per cui $y=3x-5/2$ è asintoto obliquo per $x\to-\infty$.
(b) f è derivabile se e solo se l'argomento del modulo (e quindi della radice) non è nullo, cioè se e solo se $x\neq 2,3$. Per $x<2$ o $x>3$ si ha

$$f'(x)=\frac{4\sqrt{x^2-5x+6}-2x+5}{\sqrt{x^2-5x+6}},$$

mentre per $1<x<3$ si ha

$$f'(x)=\frac{4\sqrt{-x^2+5x-6}+2x-5}{\sqrt{-x^2+5x-6}}.$$

(c) Il segno di f' è dato dal segno del numeratore. Nel primo caso il segno è banalmente positivo per $x<2$, mentre elevando al quadrato per $x>3$, si ottiene che il segno è positivo se e solo se

$$12x^2-60x+71\geq 0,$$

cioè per $x\geq(15+2\sqrt{3})/6$, che pertanto è un punto di minimo locale stretto. Nel secondo caso, il segno è certamente positivo se $5/2\leq x<3$, mentre elevando al quadrato per $2<x<5/2$ si ottiene che il segno è positivo se e solo se

$$20x^2-100x+121\leq 0,$$

cioè se e solo se $x\geq(25-2\sqrt{5})/10$ (>2). Quest'ultimo è quindi un punto di minimo relativo stretto.
(d) Si ha

$$\lim_{x\to2-} f'(x)=+\infty=\lim_{x\to3-} f'(x),$$

mentre

$$\lim_{x\to2+} f'(x)=-\infty=\lim_{x\to3+} f'(x).$$

Quindi $x=2$ e $x=3$ sono punti di cuspide e punti di massimo relativo stretto.
(e) Il grafico è come in figura.

Esercizio 2 Discutere, al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(n\left(\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right)-\frac{\alpha}{n}\right).$$

Svolgimento. Applichiamo il confronto asintotico. Ricordiamo che

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+o(x^6),\quad \log(1+x)=x+o(x),$$

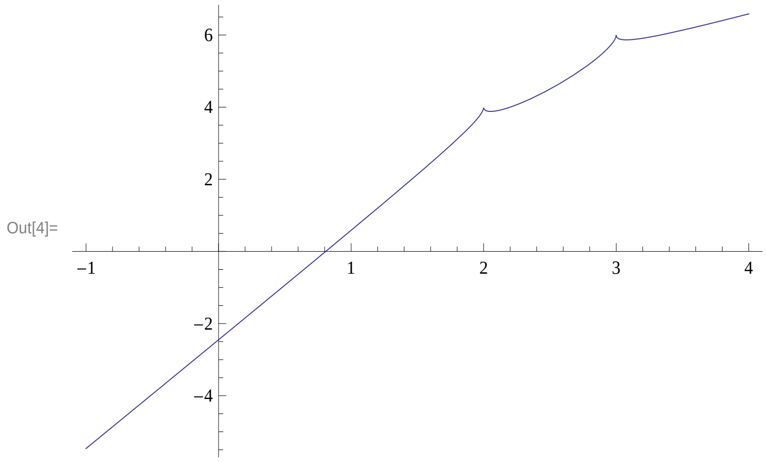


Figura 27: Grafico funzione $f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 5x + 6|}$.

per cui

$$a_n \quad := \log\left(n\left(\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right) - \frac{\alpha}{n}\right) = \log\left(n\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - \frac{\alpha}{n}\right) = \log\left(\frac{1}{2} + o(1) - \frac{\alpha}{n}\right)$$
$$= \log(\tfrac{1}{2} + o(1)).$$

Quindi il termine generale non è infinitesimo per $n \to \infty$: la serie diverge per ogni α.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x-3}}\,dx.$$

Svolgimento. Procediamo per parti: osservato che $\frac{1}{\sqrt{x-3}} = 2\left(\sqrt{x-3}\right)'$ abbiamo

$$\int \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x-3}}\,dx = 2\sqrt{x-3}\log(x+1) - 2\int \sqrt{x-3}\frac{1}{x+1}\,dx.$$

Calcoliamo per sostituzione quest'ultima primitiva ponendo $y = \sqrt{x-3}$, $x = y^2 + 3$, $dx = 2ydy$ da cui

$$\int \frac{\sqrt{x-3}}{x+1}\,dx \quad = \int \frac{y}{y^2+4}2y\,dy = 2\int \frac{y^2}{y^2+4}\,dy = 2\int\left(1 + \frac{4}{y^2+4}\right) = 2y + 2\int \frac{1}{1+(y/2)^2}$$
$$= 2y + 4\arctan\frac{y}{2} = 2\sqrt{x-3} + 4\arctan\frac{\sqrt{x-3}}{2}.$$

Da cui

$$\int \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x-3}}\,dx = 2\sqrt{x-3}\log(x+1) - 4\sqrt{x-3} + 8\arctan\frac{\sqrt{x-3}}{2}.$$

Esercizio 4 Rappresentare le soluzioni della disequazione

$$\left||z-1|^2 - \left|\frac{z-\overline{z}}{2}\right|^2 - 1\right| \le \mathrm{Im}z + 4$$

nel piano complesso.

Svolgimento. Poniamo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. La disequazione diventa allora

$$\left|(x-1)^2 + y^2 - \left|\frac{2iy}{2}\right|^2 - 1\right| \leq y + 4,$$

cioè

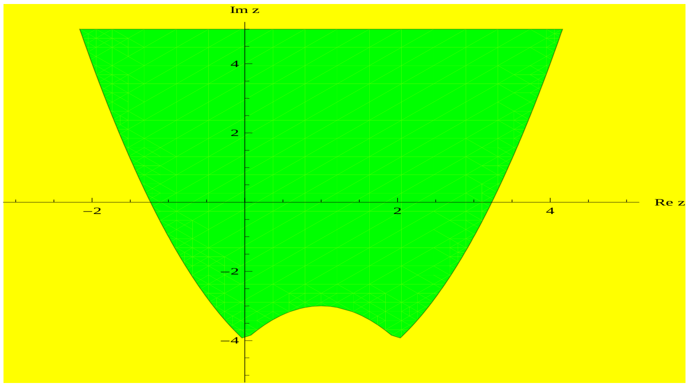
$$\left|x^2 - 2x\right| \leq y + 4.$$

Posto

$$g(x) = \left|x^2 - 2x\right| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{per } x < 0 \text{ o per } x > 2 \\ 2x - x^2 \text{ per } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

l'insieme delle soluzioni della disequazione è costituito dai punti (x, y) del piano tali che $y \geq g(x) - 4$ (v. figura, la soluzione è in verde).

Out[56]=



Appello del 3.02.2014

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{\log|x| - 1}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.

2) Calcolare i limiti significativi di f, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.

3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.

4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento.

1) Il dominio è dato da $\log|x| \neq 1$ e $x \neq 0$ cioè

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq \{\pm \mathrm{e} \ \cup \ 0\}\}$$

Poiché $f(-x) = -f(x)$ la funzione è dispari. Inoltre $f > 0$ se e solo se $\frac{x}{\log|x|-1} > 0$ cioè $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\mathrm{e}, 0) \cup (\mathrm{e}, +\infty)$

2) I limiti significativi sono

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \\ &\lim_{x\to \mathrm{e}^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \\ &\lim_{x\to \mathrm{e}^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \\ &\lim_{x\to -\mathrm{e}^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \\ &\lim_{x\to -\mathrm{e}^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \\ &\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

quindi la funzione ha un asintoto orizzontale destro di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ ed uno sinistro di equazione $y = -\frac{\pi}{2}$. Ha una discontinuità eliminabile in 0 (ponendo $f(0) = 0$) ed una discontinuità di salto (non eliminabile)in $\pm\mathrm{e}$. Per altri valori la funzione è continua perché composizione di funzioni continue.

3) Per $x \in \mathcal{D}$ abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{\log|x|-1}\right)^2} \frac{2(\log|x|-1) - \frac{2x}{x}}{(\log|x|-1)^2} = 2\frac{\log|x|-2}{(\log|x|-1)^2 + 4x^2}$$

Quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $\log|x| > 2$ cioè la funzione è strettamente crescente in $x \in (-\infty, -\mathrm{e}^2) \cup (\mathrm{e}^2, +\infty)$. I punti $x_1 = \mathrm{e}^2$ e $x_2 = -\mathrm{e}^2$ sono rispettivamente di minimo e massimo relativo. Non ci sono punti di min e max assoluti.

4) L'unico limite significativo di f' (attacco) è in $x_o = 0$. Calcoliamo quindi

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$$

perché il denominatore è un infinito di ordine 2 mentre il numeratore è di ordine 1 (rispetto a $\log|x|$) per $|x| \to 0$. Perciò la funzione prolungata è in realtà C^1 in 0.

5) Il grafico di f è in figura.

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh x^\alpha - \cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x)}{\log\cos 2x + x^3 \log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento: Sviluppando in un intorno di zero il denominatore abbiamo

$$\log\cos 2x = \log\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) = -2x^2 + o(x^2)$$

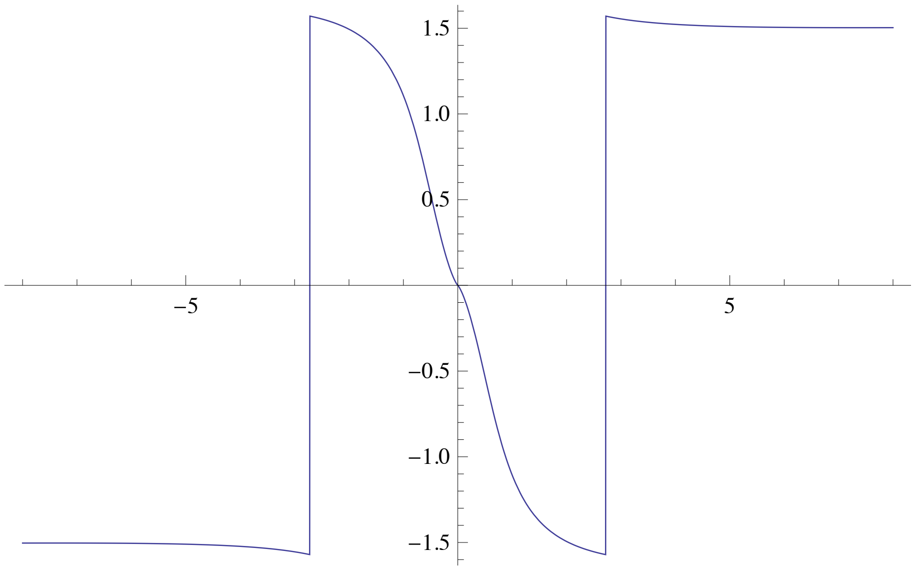


Figura 28: Il grafico di f (Tema 1).

e poiché $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3\log x}{x^2}=0$ il denominatore può essere scritto come

$$-2x^2+o(x^2)$$

Al numeratore ricordando che $\sin x = x+o(x^2)$ e che $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ per $x\to 0$ abbiamo

$$\cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x)=\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)\left(\sin x-\frac{(\sin x)^2}{2}+o(x^2)\right)=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)=x-x^2+o(x^2)$$

e quindi se $\alpha<1$ il numeratore diventa $x^\alpha+o(x^\alpha)$ e per il PSI il limite diventa $-\infty$. Se $\alpha>1$ il numeratore diventa $-x+o(x)$ e quindi sempre per il PSI il limite è uguale a $+\infty$. Infine se $\alpha=1$ il numeratore diventa $x^2+o(x^2)$ e per il PSI il limite vale $-\dfrac{1}{2}$. Ricapitolando abbiamo ottenuto che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sinh x^\alpha-\cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x)}{\log\cos 2x+x^3\log x}=\begin{cases}=-\infty & \text{se } \alpha<1\\ =+\infty & \text{se } \alpha>1\\ =-\frac{1}{2} & \text{se } \alpha=1\end{cases}$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(x+2)^{\frac{\alpha-1}{2}}(4+x)^{2\alpha}}\,dx$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha=1$.
Svolgimento. La funzione è continua in $[0,+\infty[$. Per $x\to+\infty$ la funzione è asintotica a

$$\frac{\pi}{2x^{\frac{\alpha-1}{2}+2\alpha}}$$

e quindi per avere convergenza dobbiamo porre $\frac{\alpha-1}{2}+2\alpha>1$ cioè $\alpha>\frac{3}{5}$. Poiché l'integrando è >0 e continuo in tutti gli altri punti di $\mathbb{R}^+$ possiamo concludere che l'integrale converge per $\alpha\in\left(\dfrac{3}{5},+\infty\right)$ e diverge a $+\infty$ per gli altri valori di α. Calcoliamo ora

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(4+x)^2}dx$$

Integriamo per parti

$$=-\left.\frac{1}{4+x}\arctan x\right|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{4+x}\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{17}\left(\int_0^M\frac{1}{4+x}dx+\int_0^M\frac{-x+4}{x^2+1}dx\right)$$

dove abbiamo usato la decomposizione $\dfrac{1}{(x+4)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+4}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ e calcolato i coefficienti trovando $A=\dfrac{1}{17}$, $B=-\dfrac{1}{17}$ e $C=\dfrac{4}{17}$. Dobbiamo quindi calcolare

$$\frac{1}{17}\lim_{M\to+\infty}\left(\left.\log(4+x)-\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right|_0^M+4\arctan M\right)$$

cioè semplificando

$$\frac{1}{17}\lim_{M\to+\infty}\left(\log\frac{M+4}{\sqrt{M^2+1}}+4\arctan M\right)-\frac{1}{17}\log 4=\frac{2}{17}\pi-\frac{2}{17}\log 2.$$

Esercizio 4 Sia $f(z)=2iz^2$, $z\in\mathbb{C}$. Sia $A=\{\alpha(1+i):\alpha\in\mathbb{R}\}$. Si determinino l'insieme $A_1=\{f(z):z\in A\}$ e l'insieme $A_2=\{z\in\mathbb{C}:f(z)\in A\}$ e li si rappresentino nel piano di Gauss.
Svolgimento. Per trovare l'insieme A_1 troviamo l'immagine di $f(\alpha(1+i))=2i(\alpha(1+i)^2)=2i\alpha^2(2i)=-4\alpha^2$ cioè $\mathbb{R}_o^-$. Per trovare A_2 dobbiamo trovare gli $z\in\mathbb{C}$ che soddisfano $2iz^2=\alpha(1+i)$ con $\alpha\in\mathbb{R}$. Dobbiamo quindi calcolare le radici quadrate complesse di $\dfrac{\alpha}{2}(1-i)$ cioè di $\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$. Se $\alpha\geq 0$ otteniamo come soluzioni gli $z\in\mathbb{C}$ tali che $z=\pm\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)+\sin\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)\right)$ i.e gli $z=x+iy$ tali che $y=mx$ dove $m=-\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$. Se $\alpha<0$ le soluzioni sono gli $z\in\mathbb{C}$ che soddisfano

$$z=\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}\sqrt{-\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

cioè la retta di equazione $y=mx$ con $m=-\tan\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\pi}{2}\right)$ perpendicolare alla precedente. Entrambi gli insiemi sono rappresentati in figura:

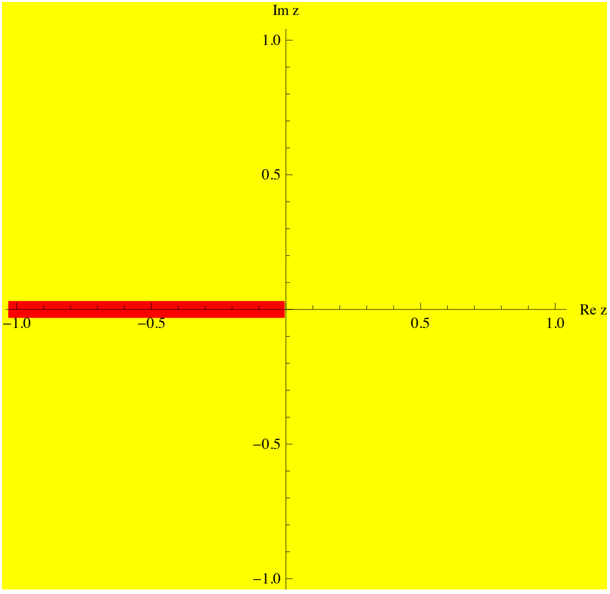


Figura 29: Insieme A_1 Tema 1

Esercizio 5 [facoltativo] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha+1}dx\right)^2$$

al variare di $\alpha > 0$.
Svolgimento. Si ha

$$\Big(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha+1}dx\Big)^2 \le \Big(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{n^\alpha\pi^\alpha+1}dx\Big)^2 = \Big(\frac{2}{n^\alpha\pi^\alpha+1}\Big)^2 \sim \frac{4}{\pi^{2\alpha}}\frac{1}{n^{2\alpha}},$$

quindi la serie converge se $\alpha > 1/2$.
Si ha inoltre

$$\Big(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha+1}dx\Big)^2 \ge \Big(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha+1}dx\Big)^2 = \Big(\frac{2}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha+1}\Big)^2 \sim \frac{4}{\pi^{2\alpha}}\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

e la serie con questo termine generale diverge se $\alpha \le 1/2$. Quindi la serie data converge se e solo se $\alpha > 1/2$.

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{3x}{\log|x|-2}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.

2) Calcolare i limiti significativi di f, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.

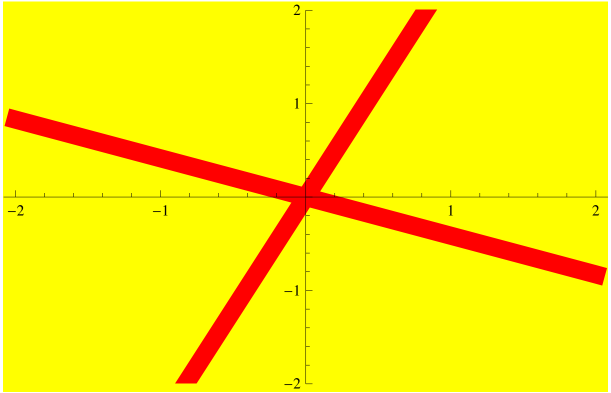


Figura 30: Insieme A_2 Tema 1

3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.

4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. Il dominio è $x \neq 0$ e inoltre $\log|x| \neq 2$, cioè $x \neq \pm e^2$. La funzione f è visibilmente dispari. In definitiva, $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, x \neq e^2, x \neq -e^2\}$. Il segno di f è il segno dell'argomento dell'arcotangente, cioè $f(x) \geq 0$ se e solo se x e $\log|x| - 2$ hanno lo stesso segno, cioè se e solo se $x > e^2$ oppure $x < -e^2$.
Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, perché $\lim_{x\to+\infty} 3x/(\log|x| - 2) = +\infty$ e analogamente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi/2$. Si ha inoltre $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to e^2+} f(x) = \pi/2 = -\lim_{x\to e^2-} f(x)$, mentre $\lim_{x\to -e^2+} f(x) = \pi/2 = -\lim_{x\to -e^2-} f(x)$ (entrambi i punti sono discontinuità di salto). Siccome $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, f è prolungabile con continuità a $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$.
Inoltre f è derivabile nel suo dominio (e $x \neq 0$) e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{9x^2}{(\log|x|-2)^2}} \frac{3(\log|x| - 2) - 3}{(\log|x| - 2)^2} = \frac{3(\log|x| - 3)}{(\log|x| - 2)^2 + 9x^2}.$$

Il segno di f' è perciò positivo se e solo se $x > e^3$ oppure $x < -e^3$. Quindi e^3 è un minimo e $-e^3$ è un massimo.
Si ha:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3\log|x|\left(1 - \frac{3}{\log|x|}\right)}{\log^2|x|\left(\left(1 - \frac{2}{\log|x|}\right)^2 + \frac{9x^2}{\log|x|^2}\right)} = 0,$$

per cui (la prolungata di) f è derivabile in 0 con derivata nulla e 0 risulta un punto di flesso a tangente orizzontale. Si ha inoltre $\lim_{x\to\pm e^2} f'(x) = -1/3e^4$. Ovviamente f non è derivabile in $\pm e^2$ perché è discontinua. Semplicemente le tangenti da destra e da sinistra hanno lo stesso coefficiente angolare.
Il grafico di f è in figura.

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^\alpha + \cosh(\sqrt{x})\log(1 - \sinh x)}{\log\cosh 3x + x^3\log x}$$

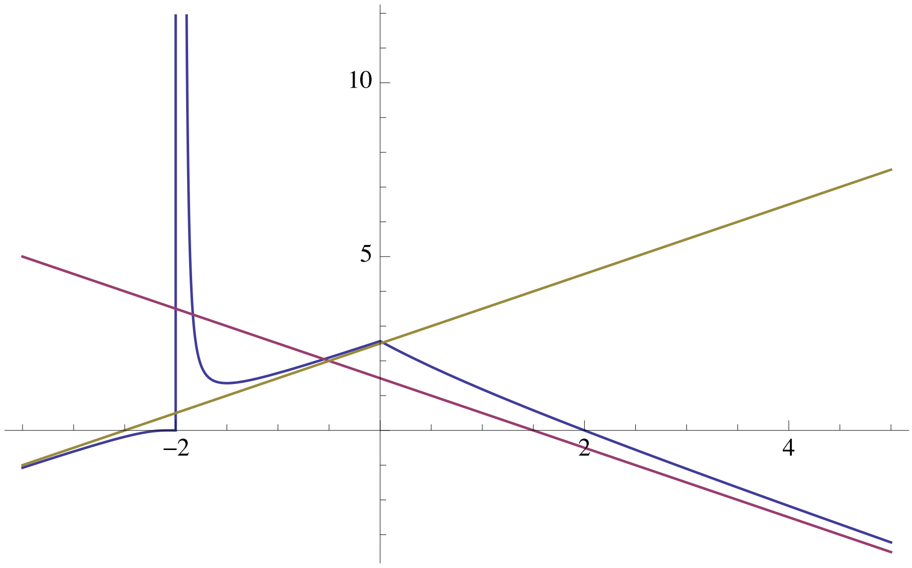


Figura 31: Il grafico di f (Tema 2).

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Osserviamo prima che $\sin x^\alpha = x^\alpha + o(x^{2\alpha})$ per $x \to 0^+$. Si ha inoltre, per $x \to 0^+$,

$$\cosh \sqrt{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$$

e

$$\log(1 - \sinh x) = -\sinh x - \frac{\sinh^2 x}{2} + o(x^2) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

per cui

$$\cosh(\sqrt{x}) \log(1 - \sinh x) = (1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2))(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = -x - x^2 + o(x^2).$$

Quindi, detto $n(x)$ il numeratore del limite da calcolare, si ha, per $x \to 0^+$,

$$\begin{aligned} &n(x) \sim x^\alpha \qquad \text{se} \quad \alpha < 1 \\ &n(x) \sim -x \qquad \text{se} \quad \alpha > 1 \\ &n(x) \sim \sin x - x - x^2 + o(x^2) = -x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Per il denominatore osserviamo innanzitutto che, per $x \to 0$, si ha $\log \cosh 3x = \log\big(1 + \cosh 3x - 1\big) = \cosh 3x - 1 + o(\cosh 3x - 1) = 9x^2/2 + o(x^2)$.

In definitiva si ha che il limite richiesto è

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{9x^2/2 + o(x^2)} = +\infty \qquad \text{se} \;\; 0 < \alpha < 1 \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{9x^2/2 + o(x^2)} = -2/9 \qquad \text{se} \;\; \alpha = 1 \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x + o(x)}{x^2/2 + o(x^2)} = -\infty \qquad \text{se} \;\; \alpha > 1. \end{aligned}$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x}{(x+3)^{\frac{\alpha-1}{3}}(x+2)^{2\alpha}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.
Svolgimento. Detto $g(x)$ l'integrando, si ha che g è continua in $[0, +\infty[$ e inoltre

$$g(x) \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{3}+2\alpha}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{\frac{7\alpha-1}{3}}}$$

per $x \to +\infty$. L'integrale quindi è convergente a $+\infty$ se e solo se $\frac{7\alpha-1}{3} > 1$, cioè se e solo se $\alpha > 4/7$. Calcoliamo ora una primitiva di g per $\alpha = 1$. Si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan 2x}{(x+2)^2}\,dx = {} & \text{(per parti)} = -\frac{\arctan 2x}{x+2} + 2\int \frac{1}{(x+2)(1+4x^2)}dx \\
= {} & \text{(per scomposizione in fratti semplici)} \\
= {} & -\frac{\arctan 2x}{x+2} + 2\Big(\int \frac{1/17}{x+2}dx + \int \frac{-4/17x + 8/17}{1+4x^2}dx\Big) \\
= {} & -\frac{\arctan 2x}{x+2} + \frac{2}{17}\log|x+2| - \frac{1}{17}\Big(\int \frac{8x}{1+4x^2}dx - \int \frac{16}{1+4x^2}dx\Big) \\
= {} & -\frac{\arctan 2x}{x+2} + \frac{2}{17}\log|x+2| - \frac{1}{17}\log(1+4x^2) + \frac{8}{17}\arctan(2x) + c.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x}{(x+2)^2}\,dx &= \lim_{x\to+\infty}\Big(-\frac{\arctan 2x}{x+2} + \frac{2}{17}\log|x+2| - \frac{1}{17}\log(1+4x^2) + \frac{8}{17}\arctan(2x)\Big) - \frac{2}{17}\log 2 \\
&= \frac{4\pi}{17} - \frac{2}{17}\log 2 + \frac{1}{17}\lim_{x\to+\infty}\log\frac{(x+2)^2}{4x^2+1} \\
&= \frac{4\pi}{17} - \frac{2}{17}\log 4.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Sia $f(z) = 4iz^2$, $z \in \mathbb{C}$. Sia $A = \{\alpha(1-i) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si determinino l'insieme $A_1 = \{f(z) : z \in A\}$ e l'insieme $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in A\}$ e li si rappresentino nel piano di Gauss.
Svolgimento. $A_1 = \{4i(\alpha(1-i))^2 : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{8\alpha^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$, cioè il semiasse delle ascisse ≥ 0. Inoltre

$$A_2 = \big\{z \in \mathbb{C} : \text{esiste } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tale che } 4iz^2 = \alpha(1-i)\big\} = \big\{z \in \mathbb{C} : \text{esiste } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tale che } z^2 = \frac{\alpha}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i}\big\}.$$

Per determinare A_2 bisogna quindi calcolare le radici quadrate di $\frac{\alpha}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \geq 0$ si ha $z = \pm\frac{\sqrt{\alpha}}{2}e^{-\frac{3}{8}\pi i}$, mentre se $\alpha < 0$, si ha $z = \pm\frac{\sqrt{-\alpha}}{2}e^{\frac{\pi}{8}i}$. Entrambi gli insiemi sono rappresentati in figura.

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{4 - \log|x|}\right).$$

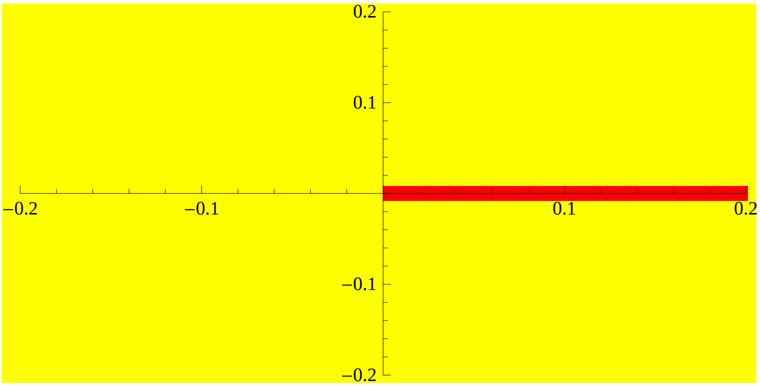


Figura 32: Insieme A_1 Tema 2

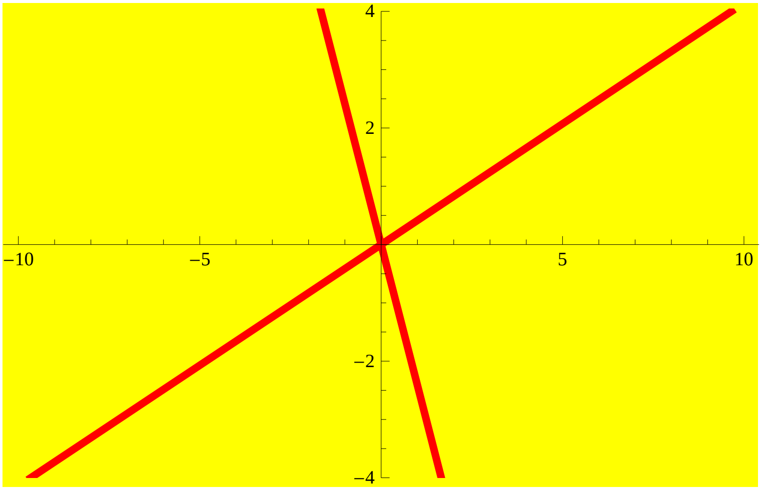


Figura 33: Insieme A_2 Tema 2

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.
2) Calcolare i limiti significativi di f, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.
3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.
4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.
5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbb{R},\, x \neq 0,\, x \neq \mathrm{e}^4\}$.

Funzione dispari.

Segno: $f(x) > 0 \iff 0 < x < \mathrm{e}^4$ e per $x < -\mathrm{e}^4$.

Limiti:

$$\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \lim_{x\to \mathrm{e}^4+} f(x) = -\pi/2, \lim_{x\to \mathrm{e}^4-} f(x) = \pi/2 \\ \lim_{x\to -\mathrm{e}^4+} f(x) = -\pi/2, \lim_{x\to -\mathrm{e}^4-} f(x) = \pi/2 \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\pi/2,\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = \pi/2.\end{array}$$

Asintoti: $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale sinistro, $y = -\pi/2$ è asintoto orizzontale destro.

Continuità: la funzione è prolungabile per continuità in $x = 0$ con valore $f(0) = 0$. È discontinua, con discontinuità di salto in $x = \pm e^4$.

Derivabilità:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{4-\log|x|}\right)^2} \frac{4 - \log|x| + 1}{(4 - \log|x|)^2} \qquad \text{per } x \neq 0,\ x \neq \pm e^4.$$

Segno della derivata:

$f'(x) > 0 \iff 5 - \log|x| > 0 \iff -e^4 < x < e^4,\ e^4 < x < e^5$ e $x < -e^5$.

Quindi $f(x)$ è crescente per $-e^4 < x < e^4$, per $e^4 < x < e^5$ e per $x < -e^5$.

Punti di estremo: $x = e^5$ è punto di massimo locale e $f(e^5) = -\arctan(e^5)$, $x = -e^5$ è punto di minimo locale e $f(-e^5) = \arctan(e^5)$.

Si ha $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ quindi l'origine è un punto di flesso a tangente orizzontale. Inoltre $\lim_{x\to \pm e^{4+}} f'(x) = 1/e^8$, $\lim_{x\to \pm e^{4-}} f'(x) = 1/e^8$.

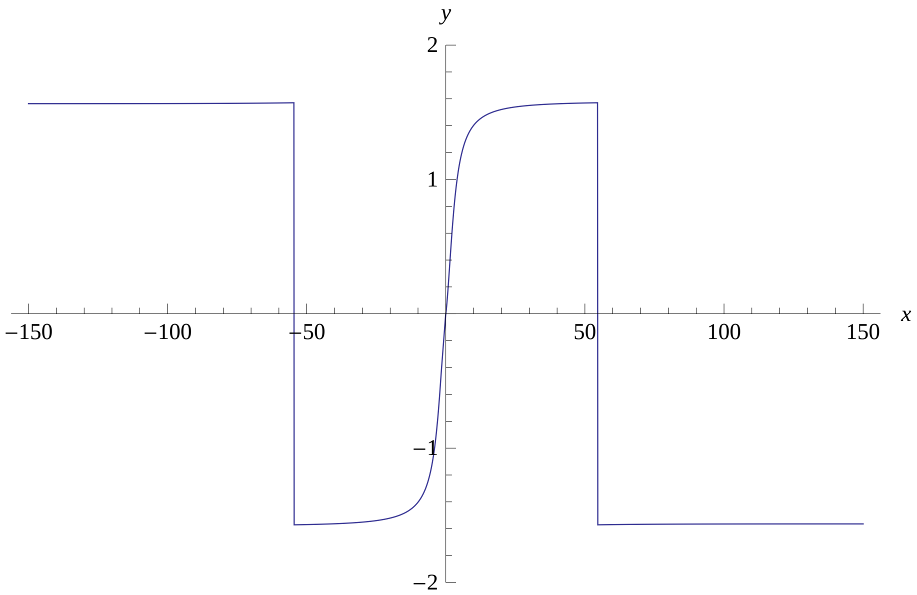


Figura 34: Il grafico di f (Tema 3)

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x})\log(1 + \sin x) - \sin x^\alpha}{\log\cos\frac{x}{2} + x^3 \log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Si ha per $x \to 0$

$$\cos(\sqrt{x})\log(1 + \sin x) = \left(1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2} + o(x)\right)\left(\sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} + o(x^2)\right) =$$

$$\Big(1-\frac{x}{2}+o(x)\Big)\Big(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\Big)=x-x^2+o(x^2)$$

$$\log\cos\frac{x}{2}=\log\Big(\cos\frac{x}{2}-1+1\Big)=\cos\frac{x}{2}-1+o(\cos\frac{x}{2}-1)=\cos\frac{x}{2}-1+o(x^2)=-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$$

$$\sin(x^\alpha)=x^\alpha+o(x^{2\alpha})$$

e $x^3\log x=o(x^2)$. Quindi

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x)-\sin x^\alpha}{\log\cos\frac{x}{2}+x^3\log x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-x^2+o(x^2)-x^\alpha+o(x^\alpha)}{-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}$$

e quindi si ha, per il principio di sostituzione,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x)-\sin x^\alpha}{\log\cos\frac{x}{2}+x^3\log x}=\begin{cases}\lim_{x\to0}\frac{-x^\alpha}{-\frac{x^2}{8}}=+\infty\quad \text{se } 0<\alpha<1,\\[2ex] \lim_{x\to0}\frac{-x^2}{-\frac{x^2}{8}}=8\quad\text{se }\alpha=1,\\[2ex] \lim_{x\to0}\frac{x}{-\frac{x^2}{8}}=-\infty\quad\text{se }\alpha>1.\end{cases}$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan 2x}{(x+1)^{2(\alpha-1)}(x+3)^{2\alpha}}\,dx$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha=1$.

Svolgimento. $f(x)=\frac{\arctan 2x}{(x+1)^{2(\alpha-1)}(x+3)^{2\alpha}}$ è continua in $[0,+\infty[$. Per $x\to+\infty$ si ha $f(x)\sim\frac{\pi}{2x^{4\alpha-2}}$ e quindi l'integrale esiste finito se e solo se $4\alpha-2>1\iff\alpha>\frac{3}{4}$.
Per $\alpha=1$ si ha integrando per parti

$$\int\frac{\arctan 2x}{(x+3)^2}\,dx=-\frac{\arctan 2x}{x+3}+\int\frac{2}{(x+3)(1+4x^2)}\,dx=$$

$$=-\frac{\arctan 2x}{x+3}+\int\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{1+4x^2}\,dx=(\text{per scomposizione in fratti semplici})=$$

$$\int\frac{\arctan 2x}{(x+3)^2}\,dx=-\frac{\arctan 2x}{x+3}+\frac{2}{37}\int\frac{1}{x+3}\,dx-\frac{8}{37}\int\frac{x}{1+4x^2}\,dx+\frac{24}{37}\int\frac{1}{1+4x^2}\,dx=$$

$$=-\frac{\arctan 2x}{x+3}+\frac{2}{37}\log|3+x|-\frac{1}{37}\log(1+4x^2)+\frac{12}{37}\arctan(2x)=$$

$$=-\frac{\arctan 2x}{x+3}+\frac{1}{37}\log\frac{(3+x)^2}{(1+4x^2)}+\frac{12}{37}\arctan(2x).$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan 2x}{(x+3)^2}\,dx=\lim_{x\to+\infty}-\frac{\arctan 2x}{x+3}+\frac{1}{37}\log\frac{(3+x)^2}{(1+4x^2)}+\frac{12}{37}\arctan(2x)\Big]_0^x=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\Big(-\frac{\arctan 2x}{x+3}+\frac{1}{37}\log\frac{(3+x)^2}{(1+4x^2)}+\frac{12}{37}\arctan(2x)\Big)-\frac{2}{37}\log3=\frac{2}{37}(3\pi-\log6).$$

Esercizio 4 Sia $f(z) = 2z^2/i$, $z \in \mathbb{C}$. Sia $A = \{\alpha(1-i) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si determinino l'insieme $A_1 = \{f(z) : z \in A\}$ e l'insieme $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in A\}$ e li si rappresentino nel piano di Gauss.

Svolgimento. Passo all'espressione di f in coordinate. Si ha $f(x+iy) = 2(x+iy)^2/i = -2i(x^2-y^2+2ixy) = 4xy - 2i(x^2-y^2)$. Quindi

$$A_1 = \{f(z),\, z \in A\} = \{(4xy, -2(x^2-y^2)),\, x = \alpha,\, y = -\alpha\} = \{(-4\alpha^2, 0),\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

che si rappresenta col semiasse reale negativo.

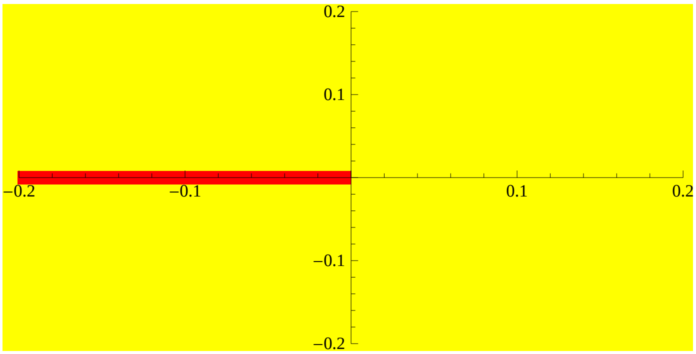


Figura 35: Insieme A_1 Tema 3

Per il secondo insieme si ha

$$A_2 = \{z : f(z) \in A\} = \{(x,y) : (4xy, -2(x^2-y^2)) = (\alpha, -\alpha)\} = \{(x,y) : 4xy = 2(x^2-y^2)\} =$$

$$= \{(x,y) : \frac{y}{x} = (-1 \pm \sqrt{2})\} \cup \{(0,0)\}$$

che si rappresenta con due rette per 0.

TEMA 4

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{2 - \log|x|}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.

2) Calcolare i limiti significativi di f, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.

3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.

4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.

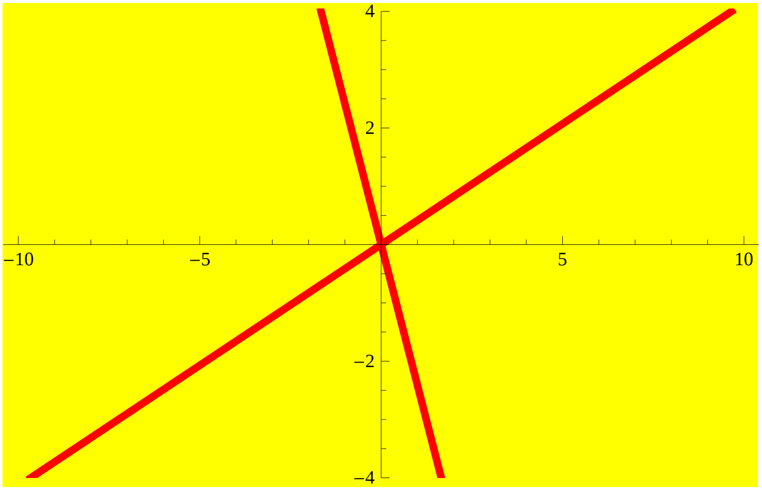


Figura 36: Insieme A_2 Tema 3

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Soluzione. **Dominio**. Deve essere $|x| \neq 0$, per l'esistenza del logaritmo. Deve essere $2 - \log|x| \neq 0$ per l'esistenza del quoziente, ovvero

$$\log|x| \neq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \neq \mathrm{e}^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \pm\mathrm{e}^2.$$

In conclusione, il dominio di f è l'insieme

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0,\ x \neq \pm\mathrm{e}^2\}.$$

Simmetrie. Per $x \in D(f)$ si ha

$$f(-x) = \arctan\left(\frac{-2x}{2 - \log|-x|}\right) = -\arctan\left(\frac{2x}{2 - \log|x|}\right) = -f(x),$$

avendo usato il fatto che l'arcotangente è una funzione dispari. Dunque, f è dispari e nel seguito è sufficiente studiare la funzione nel caso $x > 0$.

Segno. Si ha

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan\left(\frac{2x}{2 - \log|x|}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{2 - \log|x|} > 0.$$

Lo studio del segno del numeratore e del denominatore porta alla seguente conclusione

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -\mathrm{e}^2) \cup (0, \mathrm{e}^2).$$

Limiti. Ecco i limiti significativi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{2x}{2 - \log|x|}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to(e^2)^+} f(x) = \lim_{x\to(e^2)^+} \arctan\left(\frac{2e^2}{0^-}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to(e^2)^-} f(x) = \lim_{x\to(e^2)^-} \arctan\left(\frac{2e^2}{0^+}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \arctan\left(\frac{0}{\pm\infty}\right) = \arctan(0) = 0.$$

Asintoti. Retta $y = -\pi/2$ asintoto orizzontale destro. Retta $y = \pi/2$ asintoto arizzontale sinistro.

Continuità. La funzione è continua nel dominio $D(f)$ essendo composizione e quoziente di funzioni continue. Osserviamo che ponendo

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$

si ottiene un prolungamento continuo anche nel punto $x = 0$. I punti $x = \pm e^2$ sono punti di salto.

Derivabilità. f è derivabile in tutto $D(f)$. Il punto $x = 0$ è da esaminare meglio.

Derivata. Per $x \neq 0$ e $x \neq \pm e^2$ possiamo calcolare

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{2-\log|x|}\right)^2} \cdot \frac{2(2-\log|x|) - 2x\cdot(-1/x)}{(2-\log|x|)^2} \\ &= \frac{6 - 2\log|x|}{(2-\log|x|)^2 + 4x^2}. \end{aligned}$$

Intervalli di monotonia. Studiamo il segno della derivata:

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 - 2\log|x| \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -e^3 \leq x \leq e^3.$$

Ricordiamo che nel dominio si ha $x \neq \pm e^2$. Quindi limitatamente ad $x > 0$ si hanno i seguenti intervalli di monotonia:

– f cresce sull'intervallo $(0, e^2)$;
– f cresce sull'intervallo (e^2, e^3);
– f decresce sull'intervallo (e^3, ∞).

Osservazione: f non è crescente su tutto $(0, e^3) \setminus \{e^2\}$.

Limiti di f'. Abbiamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{6-2\log|x|}{(2-\log|x|)^2+4x^2} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{\frac{(2-\log|x|)^2}{6-2\log|x|} + \frac{4x^2}{6-2\log|x|}} = \frac{1}{\infty + 0} = 0.$$

Quindi il punto $x = 0$ è un punto a tangente orizzontale. In particolare f è derivabile in $x = 0$.

$$\lim_{x\to(e^2)^\pm} f'(x) = \lim_{x\to(e^2)^\pm} \frac{6-2\log|x|}{(2-\log|x|)^2+4x^2} = \frac{6-4}{4e^4} = \frac{1}{2e^4}.$$

Dunque la funzione arriva da sinistra e riparte verso destra nel punto $x = e^2$ con la stessa direzione tangente (ma, attenzione, c'è un salto). Per simmetria, lo stesso accade nel punto $x = -e^2$.

Grafico. Ecco un grafico approssimativo della funzione:

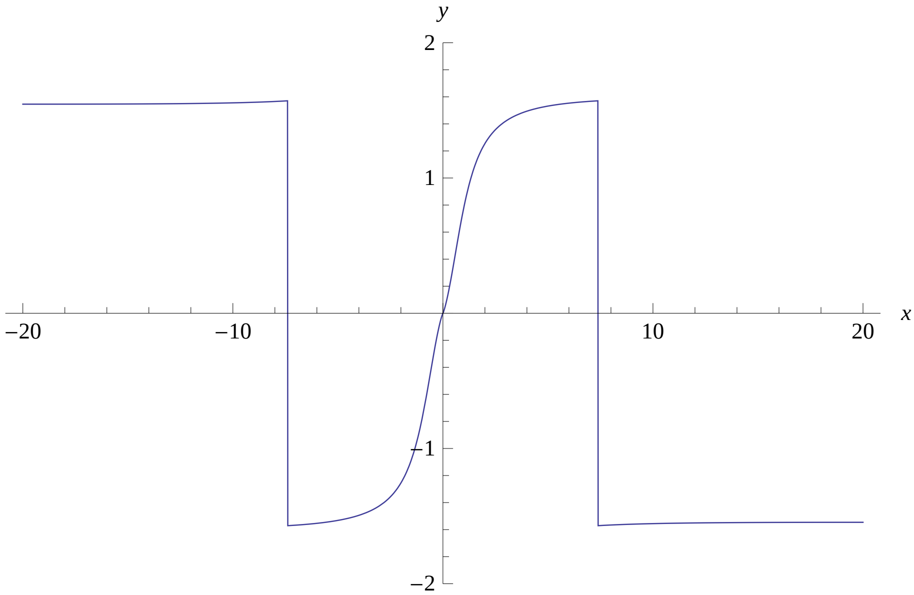


Figura 37: Il grafico di f (Tema 4)

Punti di estremo. Il punto $x = e^3$ è un punto di massimo locale non assoluto. Il punto $x = -e^3$ è un punto di minimo locale non assoluto. Non ci sono altri punti di estremo.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cosh(\sqrt{x}) \log(1 - \sin x) + \sin x^\alpha}{\log \cosh \sqrt{2}x + x^3 \log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Soluzione. Questo limite si calcola con gli sviluppi. Iniziamo ad esaminare il denominatore. Dallo sviluppo elementare

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0,$$

si trova

$$\cosh(\sqrt{2}x) = 1 + x^2 + o(x^2).$$

Dallo sviluppo del logaritmo

$$\log(1 + x) = x + o(x), \quad x \to 0,$$

si trova con la regola di sostituzione

$$\begin{aligned} \log\cosh(\sqrt{2}x) &= \log(1 + \cosh(\sqrt{2}x) - 1) = \cosh(\sqrt{2}x) - 1 + o(\cosh(\sqrt{2}x) - 1) \\ &= (\cosh(\sqrt{2}x) - 1)(1 + o(1)) = (x^2 + o(x^2))(1 + o(1)) = x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

In conclusione, il denominatore ha il seguente sviluppo

$$D(x) = \log\cosh\sqrt{2}x + x^3 \log x = x^2 + o(x^2) + x^3 \log x = x^2 + o(x^2),$$

dove abbiamo usato il fatto che $x^3 \log x = o(x^2)$ per $x \to 0^+$.

Passiamo allo sviluppo del numeratore. Dallo sviluppo elementare

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad x \to 0,$$

si trova

$$\sin(x^\alpha) = x^\alpha - \frac{x^{3\alpha}}{3!} + o(x^{3\alpha}), \quad x \to 0^+.$$

Poi si ha

$$\cosh\sqrt{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2), \quad x \to 0^+.$$

Partiamo ora da uno sviluppo preciso fino al secondo ordine del logaritmo:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0,$$

da cui si trova, con la regola di sostituzione,

$$\begin{aligned}
\log(1-\sin x) &= -\sin x - \frac{(-\sin x)^2}{2} + o(\sin^2 x) \\
&= -(x - x^3/3! + o(x^3)) - \frac{1}{2}(x - x^3/3! + o(x^3))^2 + o(x^2) \\
&= -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

In definitiva, il numeratore ha il seguente sviluppo:

$$\begin{aligned}
N(x) &= \cosh(\sqrt{x})\log(1-\sin x) + \sin x^\alpha \\
&= \Big(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)\Big)\Big(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\Big) + x^\alpha - \frac{x^{3\alpha}}{3!} + o(x^{3\alpha}) \\
&= -x - x^2 + o(x^2) + x^\alpha - \frac{x^{3\alpha}}{3!} + o(x^{3\alpha}).
\end{aligned}$$

L'andamento del numeratore dipende dal valore di α, e precisamente si ha:

$$N(x) = \begin{cases} x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ -x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha = 1, \\ -x + o(x) & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Dunque, il limite vale:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2-\alpha}} \frac{1+o(1)}{1+o(1)} = +\infty, \quad \text{se } 0 < \alpha < 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1+o(1)}{1+o(1)} = -1, \quad \text{se } \alpha = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x + o(x)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \frac{-1+o(1)}{1+o(1)} = -\infty, \quad \text{se } \alpha > 1.$$

Esercizio 3 [9 punti] Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x+2)^{\frac{\alpha-1}{4}}(5+x)^{2\alpha}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Soluzione. Si tratta di un integrale improprio su intervallo non limitato. La funzione integranda $f(x)$ è continua su $[0, \infty)$ e inoltre

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\arctan x}{(x+2)^{\frac{\alpha-1}{4}}(5+x)^{2\alpha}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{4}+2\alpha}} \frac{\arctan x}{(1+2/x)^{\frac{\alpha-1}{4}}(1+5/x)^{2\alpha}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{9\alpha-1}{4}}} \frac{\arctan x}{(1+2/x)^{\frac{\alpha-1}{4}}(1+5/x)^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Dunque si ha

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{9\alpha-1}{4}} f(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0,$$

e per il Criterio del confronto asintotico, l'integrale converge se e solo se

$$\frac{9\alpha-1}{4} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \frac{5}{9}.$$

Quando $\alpha = 1$ l'integrale diventa

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{(5+x)^2}\, dx.$$

Questo integrale si può calcolare per parti. Infatti si ha:

$$I = \int_0^\infty \frac{\arctan x}{(5+x)^2}\, dx = \Big[-(5+x)^{-1} \arctan x \Big]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \frac{1}{(5+x)(x^2+1)} dx = \int_0^\infty \frac{1}{(5+x)(x^2+1)} dx.$$

Con la tecnica dei fratti semplici si ottiene la decomposizione

$$\frac{1}{(5+x)(x^2+1)} = \frac{1}{26}\Big(\frac{1}{x+5} + \frac{5-x}{x^2+1}\Big)$$

e quindi si trova

$$\begin{aligned} I &= \frac{5}{26}\Big[\arctan x\Big]_{x=0}^{x=\infty} + \frac{1}{26}\Big[\log|5+x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{5\pi}{52} + \frac{1}{26}\Big[\log\Big(\frac{|5+x|}{\sqrt{1+x^2}}\Big)\Big]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{5\pi}{52} + \frac{1}{26}(\log 1 - \log 5) = \frac{1}{26}\Big(\frac{5\pi}{2} - \log 5\Big). \end{aligned}$$

Esercizio 4 [5 punti] Sia $f(z) = 4z^2/i$, $z \in \mathbb{C}$. Sia $A = \{\alpha(1+i) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si determinino l'insieme $A_1 = \{f(z) : z \in A\}$ e l'insieme $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in A\}$ e li si rappresentino nel piano di Gauss.

Soluzione. Se $z \in A$, allora $z = \alpha(1+i)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e dunque

$$f(z) = \frac{4}{i}\alpha^2(1+i)^2 = 8\alpha^2.$$

Dunque si ha $A_1 = \{8\alpha^2 \in \mathbb{C} : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z \geq 0,\ \mathrm{Im} z = 0\}$, semiasse positivo delle parti reali.

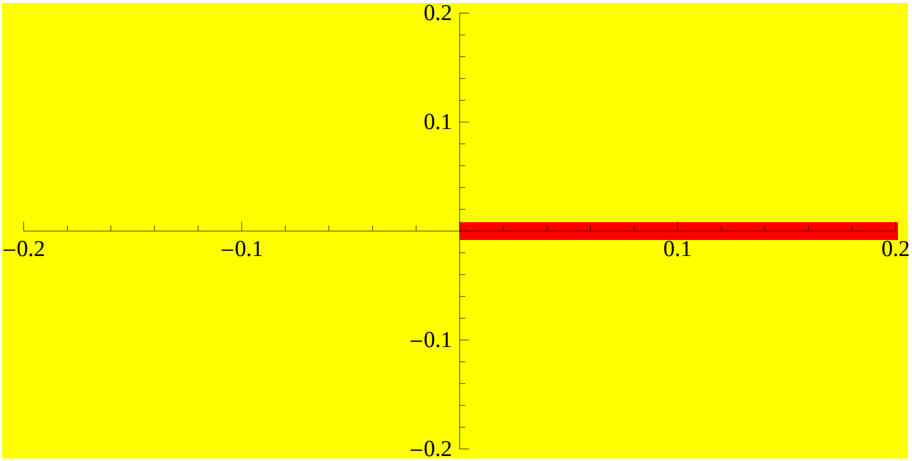


Figura 38: Insieme A_1 Tema 4

Determiniamo A_2. Osserviamo che $z \in A$ se e solo se $\mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z$. Dunque, $f(z) \in A$ se e solo se $\mathrm{Re}f(z) = \mathrm{Im}f(z)$. Ponendo $z = x + iy$, la funzione f si scrive in questo modo:

$$f(z) = \frac{4}{i}(x+iy)^2 = \frac{4}{i}(x^2 + 2ixy - y^2) = -4i(x^2 + 2ixy - y^2) = -4i(x^2 - y^2) + 8xy.$$

Dunque l'equazione $\mathrm{Re}f(z) = \mathrm{Im}f(z)$ è equivalente a

$$-4(x^2 - y^2) = 8xy \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2xy - y^2 = 0.$$

Se $y = 0$ si trova $x = 0$. Quando $y \neq 0$ possiamo porre $t = x/y$ e trovare l'equazione $t^2 + 2t - 1 = 0$ che ha le due soluzioni $t_\pm = -1 \pm \sqrt{2}$.

Dunque l'insieme A_2 è formato dalle due rette di equazione cartesiana

$$x + (1+\sqrt{2})y = 0 \quad \text{e} \quad x + (1-\sqrt{2})y = 0$$

Appello del 19.02.2014

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = (1 - |x|)\mathrm{e}^{\frac{1}{2x+2}}.$$

1) Determinare il dominio e discutere il segno di f.

2) Calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli asintoti.

3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.

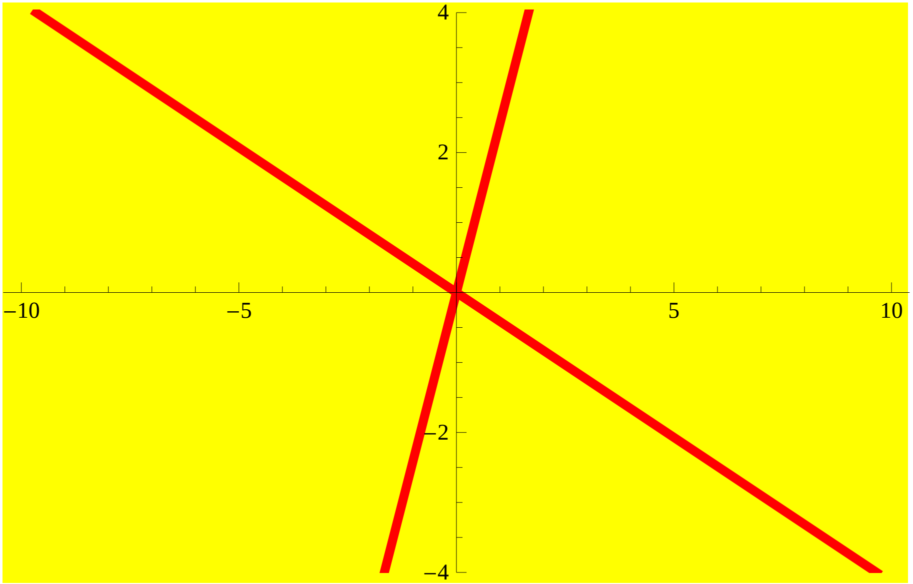


Figura 39: Insieme A_1 Tema 4

4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento.

1) Il dominio è dato da $2x + 2 \neq 0$ i.e.

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq -1\}.$$

Inoltre $f > 0$ se $|x| < 1$.

2) Calcoliamo i limiti significativi

$$\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to -1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

dove la prima forma indeterminata si risolve usando le proprietà dell'esponenziale. Dall'ultimo limite otteniamo la possibilità di asintoti obliqui. Abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \mp 1$$

e quindi rimane da calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + x = \lim_{x\to+\infty} x \left(1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{2x+2}}\right) + 1 = 1 + \lim_{x\to+\infty} x \left(-\frac{1}{2x+2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

Perciò la retta $y = -x + 1/2$ è asintoto obliquo destro. Allo stesso modo abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} x \left(-1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{2x+2}}\right) + 1 = 1 + \lim_{x\to-\infty} x \left(\frac{1}{2x+2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{3}{2}$$

e quindi la retta $y = x + 3/2$ è asintoto obliquo sinistro.

3) Per $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$ abbiamo

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{2x+2}} \left(\text{segno(x)} + \frac{1-|x|}{2(x+1)^2} \right)$$

Per $x > 0$ otteniamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $1 + \frac{1-x}{2(x+1)^2} < 0$ cioè $2x^2 + 3x + 3 < 0$, evidentemente assurdo. Quindi in $\mathbb{R}^+$ la funzione è strettamente monotona decrescente. Per $x < 0$ abbiamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $-1 + \frac{1+x}{2(x+1)^2} < 0$ cioè per $x < -1$ e $0 > x > -\frac{1}{2}$. Quindi la funzione è strettamente monotona crescente in $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$. Quindi il punto $x_1 = -\frac{1}{2}$ è un punto di minimo relativo proprio.

4) I limiti significativi di f' sono in 1^- e in 0. In 1^- abbiamo $\lim_{x \to -1^-} f'(x) = 0$ per la presenza dell'esponenziale. Mentre in 0 otteniamo:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$$

Quindi il punto $x_o = 0$ è un punto angoloso e di MAX RELATIVO.

5) Il grafico della funzione segue:

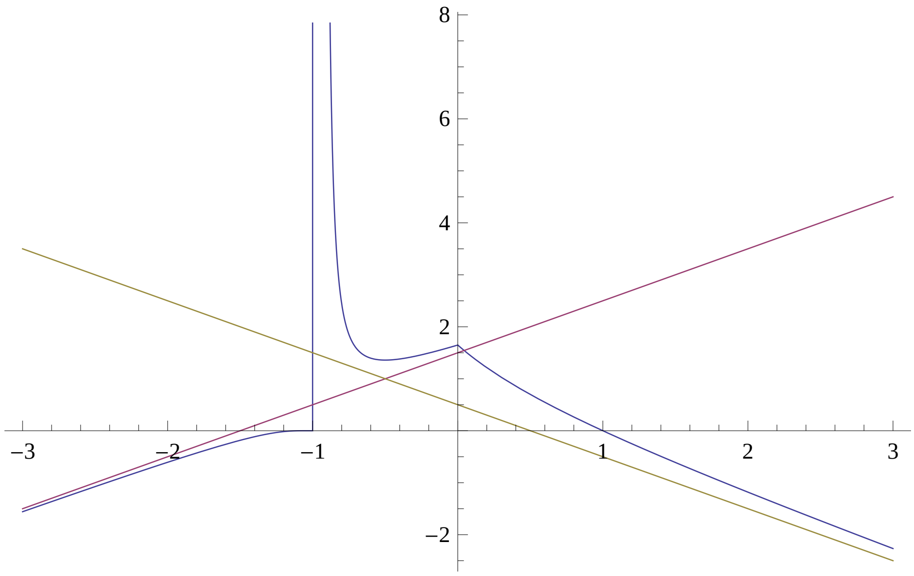


Figura 40: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+1} \frac{x^n}{(x+4)^n}.$$

1) Studiare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ c'è convergenza assoluta.

2) Studiare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ c'è convergenza semplice.

Svolgimento.

1),2) Applichiamo il criterio della radice per la convergenza assoluta e quindi semplice della serie. Siamo portati quindi a calcolare il seguente

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n-1}{n^2+1}}\frac{|x|}{|x+4|} = \frac{|x|}{|x+4|} = L$$

Quindi se $L > 1$ poiché il termine n-esimo della serie non tende a 0, non abbiamo nemmeno convergenza semplice, mentre se $L < 1$ abbiamo convergenza assoluta e quindi semplice. La disequazione $\frac{|x|}{|x+4|} < 1$ è equivalente a $x^2 < (x^2 + 8x + 16)$. Quindi per $x > -2$ la serie converge assolutamente mentre per $x < -2$ la serie non converge nemmeno semplicemente. Vediamo il caso $x = -2$; in questo caso il termine n-esimo della serie diventa

$$(-1)^n \frac{n-1}{n^2+1}$$

come si vede facilmente tale termine è infinitesimo e decrescente. Quindi per il criterio di Leibniz abbiamo convergenza semplice ma NON assoluta, poiché tale termine è asintotico a $\frac{1}{n}$.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_2^{10} \arctan\left(\sqrt[3]{x-2}\right)\, dx.$$

Svolgimento. Poniamo $x - 2 = t^3$ e quindi l'integrale diventa (usando integrazione per parti)

$$\int_0^2 \arctan t.3t^2 dt = t^3 \arctan t|_0^2 - \int_0^2 \frac{t^3}{t^2+1} dt = 8\arctan 2 - \int_0^2 \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right) dt$$
$$8\arctan 2 - 2 + \frac{1}{2}\log(x^2+1)|_0^2 = 8\arctan 2 - 2 + \frac{1}{2}\log 5$$

Esercizio 4 Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,:\, \left||z+i|^2 + (z+i)^2\right| \geq \left||z+i|^2 - \overline{(z+i)}^2\right|\right\}.$$

Svolgimento. Ponendo $z = x + iy$ abbiamo che

$$\left||z+i|^2 + (z+i)^2\right| = \left|x^2 + (y+1)^2 + x^2 - (y+1)^2 + 2ix(y+1)\right| = 2|x|\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

mentre

$$\left||z+i|^2 - \overline{(z+i)}^2\right| = \left|x^2 + (y+1)^2 - (x - i(y+1))^2\right| = 2|y+1|\sqrt{(y+1)^2 + x^2}$$

Quindi le soluzioni della disequazione sono date dall'unione dei seguenti insiemi:

$$(0, -1) \cup \{(x, y) \;:\; |x| \geq |y+1|\}$$

Poiché $|x| \geq |y+1|$ é equivalente a $(x-y-1)(x+y+1) \geq 0$ e $(0, -1)$ appartiene a tale insieme, le soluzioni sono date dall'insieme in verde sotto riportato

Appello del 15.07.2014

TEMA 1

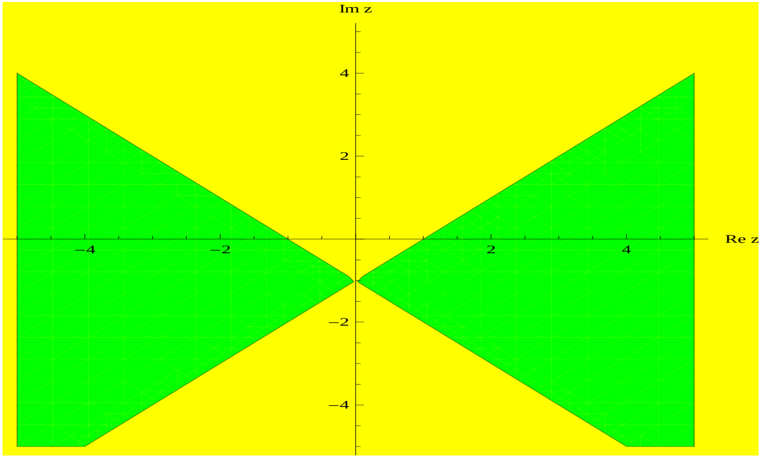


Figura 41: Soluzione dell'esercizio 4 del Tema 1 .

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{|2 - e^x|}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.

2) Calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli eventuali asintoti. Studiare la derivabilità di f.

3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f. Calcolare i limiti significativi di f'.

4) Disegnare un grafico di f.

Svolgimento. 1) Il dominio è dato da

$$e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{|2 - e^x|} > 0,$$

che è equivalente a

$$e^x > |2 - e^x|.$$

Quindi se $x \geq \log 2$ abbiamo che la disequazione sopra diventa $e^x > e^x - 2$ che è verificata per ogni $x \geq \log 2$, mentre se $x < \log 2$ la disequazione diventa $e^x > 1$ cioè $x > 0$. Il dominio è quindi dato da

$$\mathcal{D} = \{x > 0\} = \mathbb{R}^+.$$

Non ci sono quindi simmetrie. Per quanto riguarda il segno abbiamo che $f > 0$ se e solo se

$$e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{|2 - e^x|} > 1.$$

Poiché $x > 0$ la disequazione sopra è equivalente a

$$e^x + 1 - 2e^{\frac{x}{2}} > |2 - e^x|.$$

Per $x \in (0, \log 2]$ otteniamo $2e^x - 2e^{\frac{x}{2}} - 1 > 0$ e quindi, poiché $e^x > 0$, la disequazione è soddisfatta dagli $x > 0$ che soddisfano $e^{\frac{x}{2}} > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ cioè

$$x \in \left(x_1 := \log\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right), \log 2\right).$$

Mentre se $x \geq \log 2$ la disequazione diventa $3 - 2e^{\frac{x}{2}} > 0$, cioè

$$x \in \left[\log 2, x_2 = \log \frac{9}{4}\right).$$

Quindi $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (x_1, x_2)$.
2) I limiti notevoli sono per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$. è facile vedere che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Per quanto riguarda l'altro limite sappiamo che per $x > \log 2$ si ha:

$$f(x) = \log\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}\sqrt{1 - 2e^{-x}}\right) = \frac{x}{2} + \log\left(1 - \sqrt{1 - 2e^{-x}}\right)$$

e quindi razionalizzando all'interno del log moltiplicando e dividendo per $1 + \sqrt{1 - 2e^{-x}}$ abbiamo che

$$f(x) = \log 2 - \frac{x}{2} - \log\left(1 + \sqrt{1 - 2e^{-x}}\right) \qquad \forall\ x > \log 2.$$

Da questa rappresentazione otteniamo immediatamente i seguenti limiti

$$\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x\right) = 0 \end{array}$$

e quindi $y = -\frac{x}{2}$ è asintoto obliquo a $+\infty$. La funzione è continua in $\mathcal{D}$ e derivabile in $\mathcal{D} \setminus \{\log 2\}$ (per la presenza del valore assoluto e della radice).
3) Per $x \in \mathcal{D} \setminus \{\log 2\}$ abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} + \frac{\text{segno}(2 - e^x)e^x}{\sqrt{|2 - e^x|}}}{e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{|2 - e^x|}}.$$

Poiché il denominatore è > 0, il segno di f' dipende dal numeratore. È facile vedere che per $x \in (0, \log 2)$ la funzione è strettamente monotona crescente; se $x > \log 2$ abbiamo che $f'(x) > 0$ per x che soddisfa $e^{\frac{x}{2}} - \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 2}} > 0$ cioè $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^x - 2}} < 1$, equivalente a $e^x - 2 > e^x$, mai verificata e quindi per $x > \log 2$ la funzione è strettamente monotona decrescente e $\log 2$ è un punto di massimo (assoluto). Per la presenza della $\sqrt{|2 - e^x|}$ al denominatore è immediato calcolare i seguenti attacchi di f' in $\log 2$:

$$\lim_{x \to \log 2^{\pm}} f'(x) = \mp\infty,$$

e quindi log 2 è un punto di cuspide.
4) Il grafico della funzione segue:

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + \sin(e^n)}{n^3 + 3\log n} (3x)^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Usiamo il criterio del rapporto per la convergenza assoluta. Calcoliamo il seguente

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1) + \sin(e^{n+1})}{(n+1)^3 + 3\log(n+1)} \frac{n^3 + 3\log n}{n + \sin(e^n)} \left|\frac{(3x)^{n+1}}{(3x)^n}\right| = |3x| \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)n^3}{(n+1)^3 n} = |3x|$$

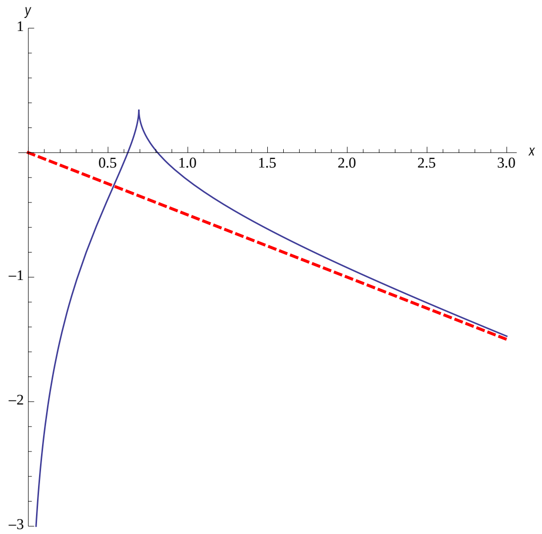


Figura 42: Il grafico di f (Tema 1).

Quindi per $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ abbiamo convergenza assoluta (e quindi semplice) per $x < -\frac{1}{3} \cup x > \frac{1}{3}$ la serie NON converge nemmeno semplicemente perché il termine generale non è infinitesimo. Per $|x| = \frac{1}{3}$ il termine n-esimo della serie è asintotico a $\frac{1}{n^2}$ e quindi anche agli estremi c'è convergenza assoluta. Ricapitolando la serie converge assolutamente per $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Esercizio 3 [9 punti] Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\left(3 + 2\sqrt{x} + x\right)} dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Svolgimento: L'integrando è continuo in $(0, +\infty)$. In un intorno destro di zero è asintotico a $\frac{1}{3x^\alpha}$ e quindi c'è convergenza per $\alpha < 1$. Per quanto riguarda $+\infty$ l'integrando è asintotico a $\frac{1}{x^{\alpha+1}}$ che converge per $\alpha > 0$. Quindi l'integrale converge per $\alpha \in (0, 1)$.
Per $\alpha = \frac{1}{2}$ poniamo $\sqrt{x} = t$ e quindi per sostituzione l'integrale diventa

$$2\int_0^{+\infty} \frac{1}{3 + 2t + t^2} dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2 + 2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dt = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} d\frac{t}{\sqrt{2}}$$

e quindi il nostro integrale di partenza vale

$$\sqrt{2}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}\sqrt{2}\right).$$

Esercizio 4 [5 punti] Esprimere in forma trigonometrica le soluzioni dell'equazione

$$\frac{z^4}{z^4 + 1} = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

e disegnarle nel piano di Gauss.

Svolgimento: Semplificando, l'equazione è equivalente alla seguente forma

$$-\frac{1}{z^4+1} = -\frac{i}{\sqrt{3}}$$

cioè

$$z^4 = -1-\sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

da cui prendendo le radici quarte complesse otteniamo le quattro soluzioni in forma trigonometrica:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_4 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Le quattro soluzioni sono in forma algebrica

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_3 = -z_1, \quad z_4 = -z_2.$$

La rappresentazione nel piano di Gauss segue:

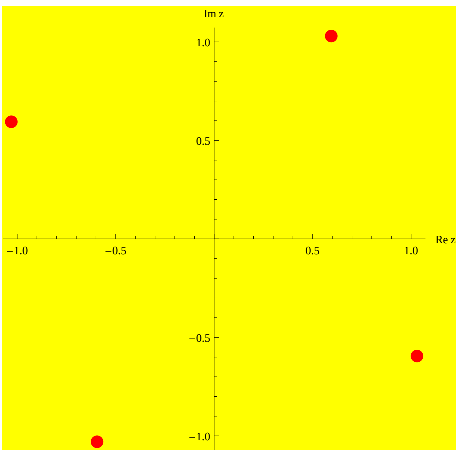


Figura 43: Soluzioni esercizio 4 (Tema 1).

Appello del 12.09.2014

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = |1 - x| \, e^{\arctan(4/x)}.$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.

2) Calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli eventuali asintoti. Studiare la continuità e la derivabilità di f.

3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f. Calcolare i limiti significativi di f'.

4) Disegnare un grafico di f.

Svolgimento. 1) Il dominio è dato dagli $\{x \neq 0\}$. Non ci sono simmetrie e la funzione è evidentemente non negativa nel suo dominio.
2) Vediamo i limiti significativi in 0 e all'infinito:

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Possibilità di asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \tfrac{f(x)}{x} = \pm 1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) \mp x = \mp(1-x)\left(1 + \tfrac{4}{x} + o\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \pm x = \pm 3$$

Quindi la retta $y = x + 3$ è asintoto a $+\infty$ mentre la retta $y = -x - 3$ è asintoto a $-\infty$. La funzione è continua nel suo dominio $\mathcal{D}$=$\{x \neq 0\}$ (ha una discontinuità di salto in 0) ed è derivabile in $\mathcal{D} \setminus \{1\}$ per la presenza del valore assoluto.
3) Calcoliamo f' in $\mathcal{D} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{\arctan(4/x)} + (1-x)e^{\arctan(4/x)} \left(\frac{4}{1+\frac{16}{x^2}} \frac{-1}{x^2}\right) = e^{\arctan(4/x)} \frac{-x^2+4x-20}{x^2+16} & \text{per } x < 1 \\ -e^{\arctan(4/x)} \frac{-x^2+4x-20}{x^2+16} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

Poiché $\frac{-x^2+4x-20}{x^2+16} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione è strettamente monotona decrescente in $x < 1$ ed è strettamente monotona crescente per $x > 1$. Vediamo l'attacco in $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{\arctan(4/x)} \frac{-x^2 + 4x - 20}{x^2 + 16} = -e^{\arctan 4}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -e^{\arctan(4/x)} \frac{-x^2 + 4x - 20}{x^2 + 16} = e^{\arctan 4}.$$

Perció $x = 1$ è un punto angoloso di minimo assoluto. Non ci sono altri punti di min o max relativo.
4) Il grafico della funzione segue:

Esercizio 2 [9 punti] Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^\alpha) - x^\alpha + 1 - \cosh x}{\sqrt{2 + x^\alpha} - \sqrt{2 - x^\alpha}}.$$

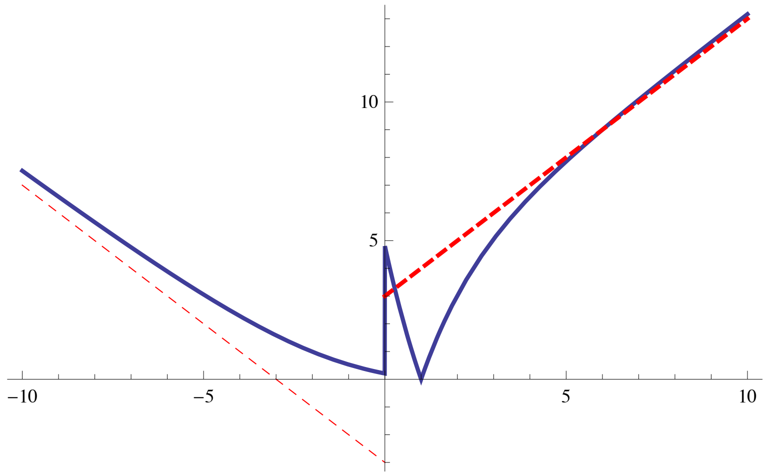


Figura 44: Il grafico di f (Tema 1).

Svolgimento. Usando gli sviluppi asintotici e razionalizzando

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^\alpha) - x^\alpha + 1 - \cosh x}{\sqrt{2+x^\alpha} - \sqrt{2-x^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^{3\alpha}}{3!} + o(x^{3\alpha}) - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x^\alpha}\big(\sqrt{2+x^\alpha} + \sqrt{2-x^\alpha}\big) =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \Big(- \frac{x^{2\alpha}}{12} + o(x^{2\alpha}) - \frac{1}{4}x^{2-\alpha} + o(x^{2-\alpha})\Big)\big(\sqrt{2+x^\alpha} + \sqrt{2-x^\alpha}\big) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{se } \alpha = 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Esercizio 3 [9 punti] Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{(4-x)^\alpha} dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.
Svolgimento. L'integrando è continuo in $[0, 4)$ e, per $x \to 4^-$, è infinito di ordine α. Di conseguenza l'integrale è convergente per $\alpha < 1$.
Si ha

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{(4-x)^\alpha}\, dx = 2\int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{4-t^2}}\, dt = 2\Big[- \int_0^2 \sqrt{4-t^2}\, dt + 4\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\, dt\Big]$$

$$= 2\Big[- 4\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, du + 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du\Big]$$

$$= 8\Big[- \int_0^{\pi/2} \cos^2 v\, dv + \arcsin u|_0^1\Big] = 8\big[- \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\big] = 2\pi.$$

Esercizio 4 [5 punti] Determinare il numero complesso α tale che il polinomio

$$P(z) = z^3 - (6+2i)z^2 + (7+5i)z + \alpha$$

abbia $z_1 = 2$ come radice. Per tale valore di α trovare le altre due radici di $P(z)$ esprimendole in forma algebrica.
Svolgimento. Imponendo che $z = 2$ sia radice si ottiene

$$8 - 4(6 + 2i) + (7 + 5i)2 + \alpha = 0$$

da cui $\alpha = 2 - 2i$. Dividendo il polinomio per $z - 2$ si ha

$$P(z) = (z - 2)(z^2 - (4 + 2i)z - 1 + i)$$

e quindi si deve risolvere $z^2 - (4 + 2i)z - 1 + i = 0$. Si ottiene $z = 2 + i + \sqrt{4 + 3i}$. Le due radici di $4 + 3i$ si trovano imponendo che $(a + ib)^2 = 4 + 3i$ il che comporta

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = 3 \end{cases}$$

che dà le soluzioni $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Alternativamente, si possono calcolare le radici quadrate di $4+3i$ usando le formule di bisezione: $|4 + 3i|^2 = 16 + 9 = 25$, da cui

$$4 + 3i = 5\Big(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}\Big) = 5\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big).$$

Le radici quadrate di $4 - 3i$ sono perciò

$$\pm\sqrt{5}\big(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\big) = \pm\Big(\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Le altre due radici di $P(z)$ sono perciò

$$z_{1,2} = 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} + i\Big(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Appello del 26.01.2015

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = |x + 1|\, e^{\frac{-1}{|x+3|}}\,.$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. (a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\}$. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$\lim_{x\to-3} f(x) = 0,$$

per cui f è prolungabile ad una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(-3) = 0$.
Asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)e^{\frac{-1}{x+3}}}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x-1)e^{\frac{1}{x+3}}}{x} = -1.$$

Per i termini noti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - x\big) &= \lim_{x\to+\infty} \Big[x\big(e^{\frac{-1}{x+3}} - 1\big) + e^{\frac{-1}{x+3}}\Big] = \lim_{x\to+\infty} \Big[\frac{-x}{x+3} + o(1) + e^{\frac{-1}{x+3}}\Big] \\ &= -1 + 1 = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) + x\big) &= \lim_{x\to-\infty} \Big[-x\big(e^{\frac{1}{x+3}} - 1\big) - e^{\frac{1}{x+3}}\Big] = \lim_{x\to-\infty} \Big[\frac{-x}{x+3} + o(1) - e^{\frac{1}{x+3}}\Big] \\ &= -2,\end{aligned}$$

per cui $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e $y = -x - 2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
(b) Si possono applicare le regole di derivazione per $x \neq -1, -3$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{\frac{-1}{x+3}} & \text{per } x > -1 \\ (-x-1)e^{\frac{-1}{x+3}} & \text{per } -3 < x < -1 \\ (-x-1)e^{\frac{1}{x+3}} & \text{per } x < -3, \end{cases}$$

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x+3}}\big(1 + \frac{x+1}{(x+3)^2}\big) = e^{\frac{-1}{x+3}}\frac{x^2+7x+10}{(x+3)^2} & \text{per } x > -1 \\ e^{\frac{-1}{x+3}}\big(-1 + \frac{-x-1}{(x+3)^2}\big) = -e^{\frac{-1}{x+3}}\frac{x^2+7x+10}{(x+3)^2} & \text{per } -3 < x < -1 \\ e^{\frac{1}{x+3}}\big(-1 - \frac{-x-1}{(x+3)^2}\big) = -e^{\frac{1}{x+3}}\frac{x^2+5x+8}{(x+3)^2} & \text{per } x < -3. \end{cases}$$

Gli zeri di $x^2 + 7x + 10$ sono -5 e -2, mentre $x^2 + 5x + 8$ non ha zeri. Quindi f è strettamente decrescente per $x < -3$, è strettamente crescente per $-3 < x < -2$, è strettamente decrescente per $-2 < x < -1$ ed è strettamente crescente per $x > -1$. In particolare $-3, -1$ sono i punti di minimo assoluto (ovvio, perché $f(x) \geq 0$ per ogni x) e $x = -2$ è un massimo locale stretto, con $f(-2) = 1/e$.
I limiti significativi di f' sono

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-3} f'(x) = 0 \qquad \text{(dal limite fondamentale } \lim_{x\to0} e^{-1/x^2}/x^2 = 0) \\ &\lim_{x\to-1^-} f'(x) = -e^{-1/2} \\ &\lim_{x\to-1^+} f'(x) = e^{-1/2}. \end{aligned}$$

Dunque l'estensione continua di f è derivabile in $x = -3$, mentre $x = -1$ è un punto angoloso.
(c) Il grafico di f è in Figura 45.

Esercizio 2 Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n-1}(x-2)^n$$

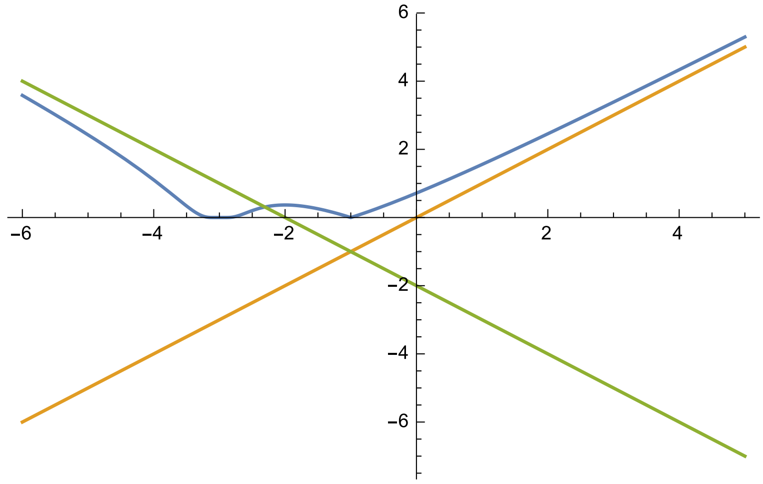


Figura 45: Il grafico di f (Tema 1).

converga, risp. converga assolutamente.

Svolgimento. Il criterio asintotico del rapporto dà

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n}\frac{n-1}{\log n}|x-2| = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \log(1+1/n)}{\log n}\frac{n-1}{n}|x-2| = |x-2|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente, e quindi converge, se $|x-2| < 1$, cioè se $1 < x < 3$, mentre il termine generale non è infinitesimo per $x < 1$ o per $x > 3$ e quindi per tali x la serie diverge assolutamente e non converge. Per $x = 1, 3$ il criterio asintotico del rapporto non dà informazioni.
Per $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n-1},$$

che è a termini di segno alterno. Poniamo $a_n = \frac{\log n}{n-1}$ e $f(x) = \frac{\log x}{x-1}$. Per un limite fondamentale si ha che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Inoltre $f'(x) = \frac{1-1/x-\log x}{(x-1)^2}$, che è visibilmente < 0 per $x > 2$. Per il teorema di Leibniz, la serie converge. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, osserviamo che per $x = 1$ e per $x = 3$ questa significa la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

Siccome $a_n \geq 1/(n-1)$ per ogni $n \geq 2$ e la serie armonica diverge, per il criterio del confronto la serie diverge.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(\sin^2 x + 3\big)e^{2\cos x}|\sin x|\, dx.$$

Svolgimento. L'integrando è una funzione pari e l'intervallo d'integrazione è simmetrico, per cui si ha

$$I := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(\sin^2 x + 3\big)e^{2\cos x}|\sin x|\, dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \big(\sin^2 x + 3\big)e^{2\cos x}\sin x\, dx.$$

Calcoliamo separatamente due primitive. Si ha:

$$\begin{aligned}
\int e^{2\cos x}\sin x\,dx &= -\frac{1}{2}e^{2\cos x} =: F_1(x)\\
\int e^{2\cos x}\sin^3 x\,dx &= \text{(per parti)} \quad -\frac{1}{2}e^{2\cos x}\sin^2 x + \int e^{2\cos x}\sin x\cos x\,dx\\
&= \text{(ancora per parti)} \quad -\frac{1}{2}e^{2\cos x}\sin^2 x - \frac{1}{2}e^{2\cos x}\cos x - \frac{1}{2}\int e^{2\cos x}\sin x\,dx\\
&= -\frac{1}{2}e^{2\cos x}\sin^2 x - \frac{1}{2}e^{2\cos x}\cos x + \frac{1}{4}e^{2\cos x}\\
&= \frac{1}{4}e^{2\cos x}\big(1 - 2\cos x - 2\sin^2 x\big) =: F_2(x).
\end{aligned}$$

Quindi

$$I = 2\big(3F_1(x) + F_2(x)\big)\big|_0^{\pi/2} = \frac{7}{2}\big(e^2 - 1\big).$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = i\bar{z}^3 - 3 + i, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$\begin{aligned}
A &= \big\{f(z) : z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,(z) = 0\big\},\\
B &= \big\{z \in \mathbb{C} : f(z) = i - 11\big\}.
\end{aligned}$$

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned}
A &= \{i(\bar{iy})^3 - 3 + i : y \in \mathbb{R}\} = \{i(-\bar{i}y^3) - 3 + i : y \in \mathbb{R}\}\\
&= \{iiy^3 - 3 + i : y \in \mathbb{R}\} = \{-y^3 - 3 + i : y \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

L'insieme A è quindi una retta parallela all'asse delle ascisse $\mathrm{Im}\, z = 1$.
Si ha inoltre:

$$\begin{aligned}
B &= \{z : i\bar{z}^3 - 3 + i = i - 11\} = \{z : \bar{z}^3 = 8i\}\\
&= \{z : z^3 = -8i\} = \{z : z^3 = 8e^{3\pi i/2}\}\\
&= \{2e^{i\pi/2}, 2e^{7\pi i/6}, 2e^{11\pi i/6}\} = \{2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i\}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^t - 1}{t}\,dt.$$

Dimostrare che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo di f.
Svolgimento. Per il teorema della media integrale, per ogni x esiste $t_x \in [x^2, 2x^2]$ tale che $f(x) = x^2\frac{e^{t_x}-1}{t_x}$. Siccome $t_x \to 0$, per il teorema sul cambio di variabili nei limiti si ha che $\frac{e^{t_x}-1}{t_x} \to 1$. Quindi $f(x) \sim x^2$ per $x \to 0$.

Appello del 20.02.2015

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sin(2x)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(2x)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.
(a) Si determini il dominio D di f; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).

Svolgimento. La funzione è periodica di periodo π: $f(x+\pi) = \frac{1}{\sin(2x+2\pi)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(2x+2\pi)|}\right)} = f(x)$ e dispari. La studiamo perciò nell'intervallo $[0, \pi/2]$
(a) In $[0, \pi/2]$ il dominio D, nel mezzo intervallo considerato, è uguale a $\{x \in [0, \pi/2] : \sin(2x) \neq 0, \cos(2x) \neq 0, 2x \neq \pi/2\} = \{x \in [0, \pi/2] : x \neq 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$. I limiti da calcolare sono:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}}}{\sin(2x)} \quad (\text{ponendo } \sin(2x) = y) \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{\frac{-1}{y}}}{y} = 0 \quad (\text{questo è un limite fondamentale}) \\
&= \lim_{x\to \pi/2^-} f(x); \\
\lim_{x\to \pi/4} f(x) &= 1.
\end{aligned}$$

Quindi f è prolungabile con continuità a tutto l'intervallo $[0, \pi/2]$.
(b) Le regole di derivazione si possono applicare in D. Risulta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}}}{\sin(2x)} & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\[2ex] \dfrac{e^{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}}}{\sin(2x)} & \text{per } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \frac{2\sin^2(2x)+2\cos^2(2x)}{\sin^2(2x)} \sin(2x) - 2e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \cos(2x)}{\sin^2(2x)} = \dfrac{e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \big(2-\sin(4x)\big)}{\sin^3(2x)} & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\[3ex] \dfrac{-e^{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \frac{2\sin^2(2x)+2\cos^2(2x)}{\sin^2(2x)} \sin(2x) - 2e^{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \cos(2x)}{\sin^2(2x)} = \dfrac{-e^{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \big(2+\sin(4x)\big)}{\sin^3(2x)} & \text{per } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Risulta perciò $f'(x) < 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{4}$, mentre $f'(x) > 0$ per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Per i limiti di f' si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x\to \pi/2^-} f'(x) \quad \left(\text{questo è il limite fondamentale } \lim_{y\to 0} \frac{e^{-1/|y|}}{y^3} = 0\right) \\
&\lim_{x\to \pi/4^-} f'(x) = 2 \\
&\lim_{x\to \pi/4^+} f'(x) = -2.
\end{aligned}$$

Quindi $x = 0, \pi/2$ sono punti in cui l'estensione di f è derivabile, con derivata nulla (in realtà sono flessi a tangente orizzontale), mentre $x = \pi/4$ è un punto angoloso, di massimo assoluto.
(c) Il grafico è in Figura 46.

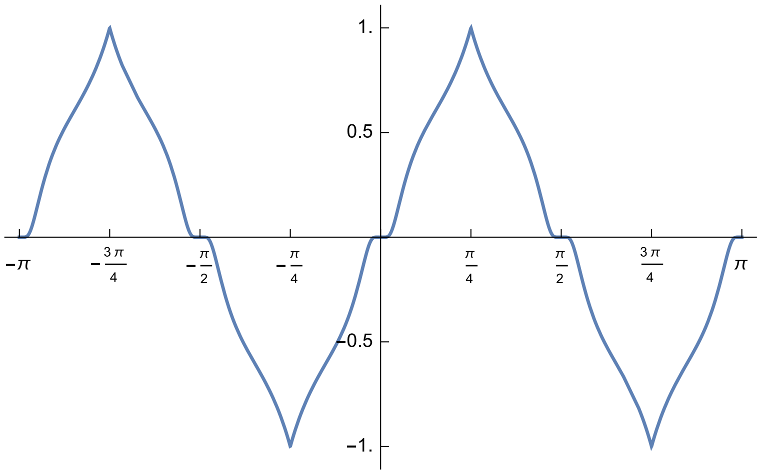


Figura 46: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x}{\sinh x - \log(1 + \sin x)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. (a) Si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x &= 1 + x - x^2 + \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &\quad - \Big(1 - \frac{(\alpha x)^2}{2} + o((\alpha x)^3)\Big) - \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\ &= x^2\Big(-1 + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\Big) + x^3\Big(-1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\Big) \\ &= \frac{\alpha^2 - 1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

quindi l'ordine è due se $\alpha \neq \pm 1$, mentre è tre se $\alpha = \pm 1$.
(b) Per il denominatore si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} \sinh x - \log(1 + \sin x) &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \Big(\sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + o(x^3)\Big) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \Big(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Quindi il limite è $\alpha^2 - 1$, in particolare vale 0 per $\alpha = \pm 1$.

Esercizio 3 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^1 xe^{2x}\big(e^{2x} - 1\big)^{\alpha/2}\,dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = -1$.
Svolgimento. Poniamo $g(x) = xe^{2x}\big(e^{2x} - 1\big)^{\alpha/2}$ e osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, g è continua in $(0, 1]$ ed è positiva. Bisogna quindi studiare la convergenza dell'integrale in 0. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$g(x) \sim x(2x)^{\alpha/2} = 2^{\alpha/2}x^{1+\alpha/2}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente se e solo se $1 + \alpha/2 > -1$, cioè se e solo se $\alpha > -4$.
Per $\alpha = -1$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx \underset{\text{(per parti)}}{=} & \; x\sqrt{e^{2x}-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{e^{2x}-1}\,dx \\
\underset{\text{(ponendo } e^{2x}-1=t^2\text{, quindi } dx=\frac{t}{1+t^2}dt)}{=} & \; \sqrt{e^2-1} - \int_0^{\sqrt{e^2-1}} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \\
= & \; \sqrt{e^2-1} - t\Big|_0^{\sqrt{e^2-1}} + \arctan t\Big|_0^{\sqrt{e^2-1}} \\
= & \; \arctan\sqrt{e^2-1}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Re}\Big((z+i)^2\Big) \le \mathrm{Im}\Big(i(\bar{z}-2i)^2\Big) \tag{3}$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.
Svolgimento. Posto $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Big((z+i)^2\Big) &= \mathrm{Re}\Big(x + i(1+y)\Big)^2 = \mathrm{Re}\Big(x^2 - (y+1)^2 + 2ix(y+1)\Big) = x^2 - (y+1)^2 \\
\mathrm{Im}\Big(i(\bar{z}-2i)^2\Big) &= \mathrm{Im}\Big(i\big(x - i(y+2)\big)^2\Big) = \mathrm{Im}\Big(i\big(x^2 - (y+2)^2 - 2ix(y+2)\big)\Big) = x^2 - (y+2)^2,
\end{aligned}$$

per cui la disequazione (3) è equivalente a

$$x^2 - (y+1)^2 \le x^2 - (y+2)^2,$$

che ha per soluzioni

$$y \le -\frac{3}{2}.$$

Le soluzioni della disequazione sono perciò il semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}z \le -\frac{3}{2}\}$, visibile in Figura 47.

Appello del 16.07.2015

TEMA 1

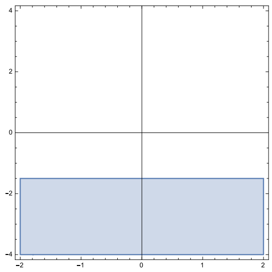


Figura 47: Le soluzioni dell'esercizio 4 (Tema 1).

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = (x-1)\log|x-1| + x\log x.$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D, gli eventuali asintoti e gli eventuali punti in cui è possibile prolungarla per continuità;
(b) studiare la derivabilità di f, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo;
(c) studiare graficamente il segno di f e calcolare i limiti significativi di f';
(d) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. (a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x \neq 1\}$. Si ha immediatamente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

per cui f può essere estesa con continuità a tutto $[0,+\infty[$. Si ha inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty$, per cui non cè l'asintoto obliquo.
(b) e (c) f è evidentemente derivabile in D e

$$f'(x) = \log|x-1| + \log x + 2.$$

Si ha inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty = \lim_{x\to 1} f'(x),$$

per cui la prolungata di f non è derivabile in 0 e 1 (in 1 ha un flesso a tangente verticale).
Per quanto riguarda il segno di f', si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x|x-1| \geq e^{-2}$, $x \in D$. Per $x > 1$, l'unica soluzione della disequazione $x^2 - x - e^{-2}$ è $(e + \sqrt{4+e^2})/(2e)$, che è un punto di minimo locale stretto. Per $0 < x < 1$, le soluzioni della disequazione $-x^2 + x - e^{-2} \geq 0$ sono $(e \pm \sqrt{-4+e^2})/(2e)$, che sono un punto di minimo e di massimo locale stretti.
Per quanto riguarda lo studio del segno di f, si osservi che $f(1/2) = 0 = f(1)$, e quindi $f(x) < 0$ per ogni $x \in]0, 1/2[$, mentre $f(x) > 0$ per ogni $x \in]1/2, 1[$. Siccome $f((1+\sqrt{1+e^{-2}})/2) < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, esiste almeno un punto $\bar{x} > (1+\sqrt{1+e^{-2}})/2$ tale che $f(\bar{x}) = 0$. Per la monotonia di f, tale punto è unico.
(d) Il grafico di f è in figura 48.

Esercizio 2 Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-1)^n}{3^n + n^2|x-1|^4}$$

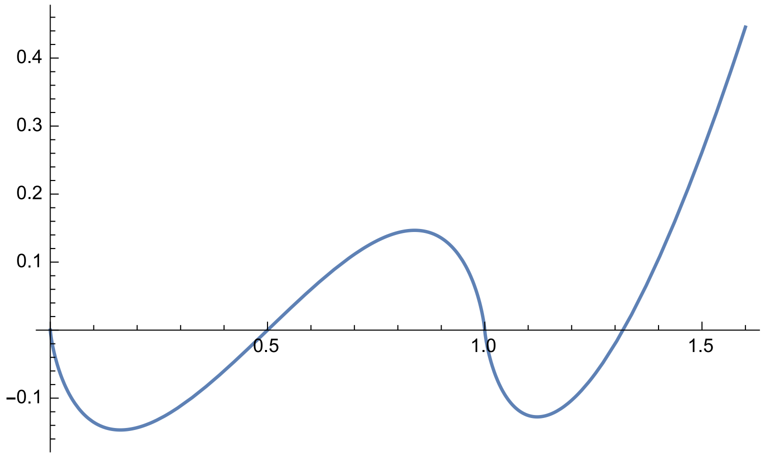


Figura 48: Il grafico di f (Tema 1).

al variare di $x \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{2^n|x-1|^n}{3^n + n^2|x-1|^4} \sim \frac{2^n|x-1|^n}{3^n} \qquad \text{per } n \to \infty,$$

dato che $n^2|x-1|^4 = o(3^n)$ per $n \to \infty$. Quindi la serie (dei valori assoluti) ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n|x-1|^n}{3^n},$$

che per il criterio della radice converge se e solo se $|x-1| < 3/2$. Alternativamente si poteva studiare la convergenze assoluta applicando il criterio asintotico del rapporto alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n|x-1|^n}{3^n + n^2|x-1|^4}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}|x-1|^{n+1}}{3^{n+1} + (n+1)^2|x-1|^4} \frac{3^n + n^2|x-1|^4}{2^n|x-1|^n} &= \lim_{n\to\infty} 2|x-1| \frac{3^n(1 + |x-1|^4 n^2/3^n)}{3^{n+1}|x-1|^4(n+1)^2/3^{n+1})} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2|x-1|/3,\end{aligned}$$

per cui la serie converge assolutamente, e quindi converge, se $|x-1| < 3/2$, cioè se e solo se $-1/2 < x < 5/2$, mentre diverge assolutamente e non converge perché il termine generale non è infinitesimo, per $x < -1/2$ e per $x > 5/2$.
Per $x = -1/2$ il termine generale, in modulo, diventa

$$\frac{2^n|-3/2|^n}{3^n + n^2|3/2|^4} = |(-1)^n| \frac{3^n}{3^n + n^2 \frac{3^4}{2^4}} = \frac{1}{1 + \frac{n^2}{3^n}\frac{3^4}{2^4}} = \frac{1}{1 + o(1)} \to 1$$

per $n \to \infty$. La serie quindi diverge assolutamente anche per $x = -1/2$ e non converge perché il termine generale non è infinitesimo. Per $x = 5/2$ il ragionamento è del tutto simile, per cui la serie converge assolutamente e quindi converge se e solo se $x \in]-1/2, 5/2[$, mentre in tutti gli altri punti non converge né assolutamente né semplicemente.

Esercizio 3 (a) Provare che $\sinh \log(1+\sqrt{2}) = 1$.
(b) Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}+2}.$$

Svolgimento. (a) $e^{\log(1+\sqrt{2})} - e^{-\log(1+\sqrt{2})} = 1+\sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 2.$
(b) Si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}+2} &= (\text{ponendo } x/2 = t) \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}+1} \\
&= (\text{ponendo } t = \sinh u) \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh u}{\cosh u + 1} du \\
&= \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} du - \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{1}{\cosh u + 1} du \\
&= \log(1+\sqrt{2}) - 2\int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{1}{e^u + e^{-u} + 2} du \\
&= (\text{ponendo } e^u = s) \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{s^2+2s+1} ds \\
&= \log(1+\sqrt{2}) + 2\frac{1}{s+1}\Big|_1^{1+\sqrt{2}} \\
&= \log(1+\sqrt{2}) + \frac{2}{2+\sqrt{2}} - 1 \\
&= \log(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si risolva l'equazione

$$\Big(\frac{1}{18} - \frac{i\sqrt{3}}{18}\Big)\bar{z}^2 = 1,$$

disegnandone le soluzioni nel piano di Gauss.
Svolgimento. Poniamo $z = \rho e^{i\vartheta}$. L'equazione diventa

$$\frac{1}{9}\Big(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\rho^2 e^{-2i\vartheta} = 1,$$

cioè

$$\rho^2 e^{-i(\pi/3+2\vartheta)} = 9,$$

da cui $\rho = 3$ e $\vartheta = -\pi/6,\ 5\pi/6$. Quindi le soluzioni sono

$$z = \pm 3\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\Big).$$

Appello del 18.07.2015

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = x - 1 + \frac{x-1}{\log|x-1|}.$$

(a) Determinare le eventuali simmetrie ed il dominio D di f, i limiti di f agli estremi di D e i punti in cui è possibile prolungarla per continuità;
(b) determinare gli eventuali asintoti di f;
(c) studiare la derivabilità di f, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo;
(d) studiare graficamente il segno di f;
(e) calcolare i limiti significativi di f';
(f) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (a) La funzione f non ha simmetrie evidenti. Il suo dominio è costituito dal dominio di $\log|x-1|$, cioè da $x \neq 1$ e dai punti in cui non si annulla il denominatore $\log|x-1|$, cioè da $x \neq 0, 2$. Quindi $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, 1, 2\}$. Si ha (attenzione al segno di $(x-1)/\log|x-1|$!):

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty.$$

La funzione è quindi prolungabile con continuità in $x = 1$, ponendo $f(1) = 0$.
(b) Si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\log|x-1|} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = -1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{\log|x-1|} = -\infty,$$

per cui f non ha asintoti obliqui.
(c) f è derivabile in tutti i punti del suo dominio, per le regole di derivazione. Si ha:

$$f'(x) = 1 + \frac{\log|x-1| - \frac{(x-1)\operatorname{sign}(x-1)}{|x-1|}}{\log^2|x-1|} = \frac{\log^2|x-1| + \log|x-1| - 1}{\log^2|x-1|}.$$

Il segno di f' dipende dal segno di $\log^2|x-1| + \log|x-1| - 1$, che è positivo se e solo se

$$\log|x-1| < (-1-\sqrt{5})/2 \quad \text{oppure} \quad \log|x-1| > (-1+\sqrt{5})/2.$$

La soluzione della disequazione $\log|x-1| \leq (-1-\sqrt{5})/2$ è

$$1 - e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \leq x \leq 1 + e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}},$$

mentre la soluzione della disequazione $\log|x-1| \geq (-1+\sqrt{5})/2$ è

$$x \leq 1 - e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \qquad \text{oppure} \qquad x \geq 1 + e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Quindi i punti $x_1 = 1 - e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ e $x_2 = 1 + e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ sono di massimo relativo, mentre i punti $x_3 = 1 - e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ e $x_4 = 1 + e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ sono di minimo relativo.
(d) Per quanto riguarda il segno di f, occorre calcolare i valori di f nei punti x_1 e x_4. Si ha: $f(x_1) < 0$ e $f(x_4) > 0$, per cui f è positiva in $]0, \xi_1[$, dove ξ_1 è un punto (non calcolabile esplicitamente) compreso tra 0 e x_2, in $]\xi_2, \xi_3[$, dove $x_2 < \xi_2 < 1 < x_x < \xi_3$ (ξ_2 e ξ_3 non calcolabili esplicitamente) e per $x > 2$, mentre è negativa altrove.
(e) L'unico limite di f' da calcolare è per $x \to 1$. Si ha

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 1,$$

per cui f è derivabile anche in $x = 1$.
(f) Il grafico di f è rappresentato nella Figura 49

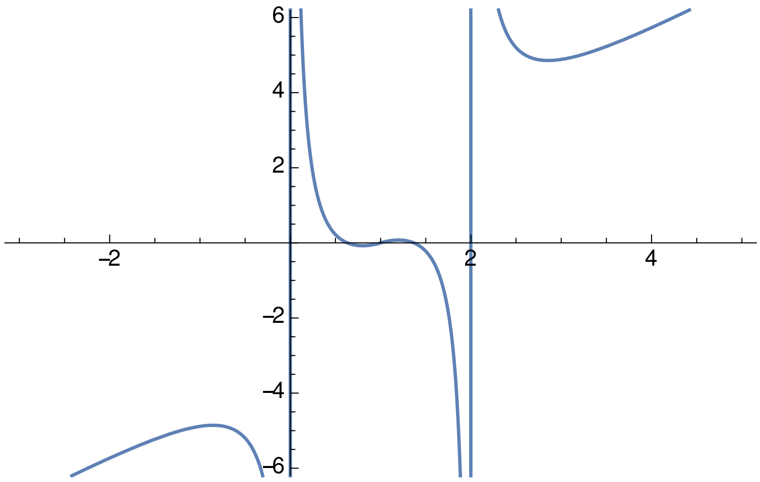


Figura 49: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin\log(1+x^2) - \cosh(\alpha x) + 1 - x^2 e^{-1/x}}{x^5 \log x + x^4}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Si ha, per $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned} \sin\log(1+x^2) &= \log(1+x^2) - \frac{1}{6}\log^3(1+x^2) + o\big(\log^3(1+x^2)\big) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ \cosh(\alpha x) &= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{1}{24}\alpha^4 x^4 + o(x^4) \\ x^2 e^{-1/x} &= o(x^4), \end{aligned}$$

quindi il numeratore è

$$x^2\Big(1 - \frac{\alpha^2}{2}\Big) - x^4\Big(\frac{1}{2} + \frac{\alpha^4}{24}\Big) + o(x^4).$$

Il denominatore è

$$x^4 + o(x^4)$$

e quindi si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\log(1+x^2)-\cosh(\alpha x)+1-x^2e^{-1/x}}{x^5\log x + x^4} = \begin{cases} +\infty & \text{se } |\alpha|<\sqrt{2} \\ -\infty & \text{se } |\alpha|>\sqrt{2} \\ -\frac{2}{3} & \text{se } |\alpha|=\sqrt{2}. \end{cases}$$

Esercizio 3 Si determinino tutti i parametri $\alpha, \beta > 0$ tali che l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^\alpha (x+2\sqrt{x-2}+1)^\beta}\, dx$$

converga e lo si calcoli per $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$.
Svolgimento. L'integranda è continua in $(2, +\infty)$. Inoltre si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{3^\beta}\frac{1}{(x-2)^\alpha} \qquad \text{per } x \to 2^+,$$

e quindi l'integrale converge nel primo estremo se e solo se $\alpha < 1$, e

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+\beta}} \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

e quindi l'integrale converge nel secondo estremo se e solo se $\alpha + \beta > 1$. In sintesi, l'integrale converge se e solo se le condizioni $\alpha < 1$ e $\alpha + \beta > 1$ sono entrambe soddisfatte.
Per quanto riguarda il calcolo, si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x-2}(x+2\sqrt{x-2}+1)}\, dx &= (\text{sostituendo } x-2=t^2) \int \frac{2t}{t(t^2+2t+3)}\, dt \\ &= 2\int \frac{1}{(t+1)^2+2}\, dt = \int \frac{1}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\, dt \\ &= \sqrt{2}\arctan\frac{t+1}{\sqrt{2}} + c = \sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{2}} + c. \end{aligned}$$

Quindi l'integrale richiesto vale

$$\sqrt{2}\Big(\lim_{x\to+\infty} \arctan\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{2}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{\pi - 2\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 4 Si risolva la disequazione

$$\operatorname{Re}(z+1)\Big(\operatorname{Re}(z^2) - 2\operatorname{Re}(\bar{z}^2) + 2\big(\operatorname{Im}(iz)\big)^2\Big) \le \operatorname{Re}\Big(z + \frac{2}{1+i}\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.
Svolgimento. Posto $z = x + iy$, si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z+1) &= x+1 \\ \operatorname{Re}\Big(z+\frac{2}{1+i}\Big) &= \operatorname{Re}\Big(x+iy+\frac{2(1-i)}{2}-1\Big) = x+1 \\ \operatorname{Re}(z^2) - 2\operatorname{Re}(\bar{z}^2) + 2\big(\operatorname{Im}(iz)\big)^2 &= x^2-y^2-2\big(x^2-y^2\big)+2x^2 = x^2+y^2. \end{aligned}$$

La disequazione da risolvere può quindi essere riscritta come

$$(x+1)\big(x^2+y^2\big) \le x+1,$$

cioè come

$$(x+1)\big(x^2+y^2-1\big) \le 0.$$

Le soluzioni sono quindi

$$x \le -1 \qquad \text{e} \qquad x^2+y^2 \ge 1,$$

cioè il semipiano $\{(x,y) : x \le -1\}$, e

$$x \ge -1 \qquad \text{e} \qquad x^2+y^2 \le 1,$$

cioè il cerchio $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$. Le soluzioni sono rappresentate dalle regioni colorate in Figura 50.

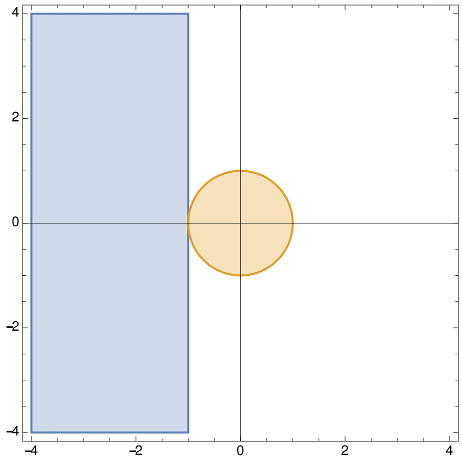


Figura 50: La soluzione dell'esercizio 4 (Tema 1).

Appello del 25.01.2016

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{x+1}{|x-1|}}.$$

(a) Determinare il dominio D di f e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (a) Si ha

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \text{ e } \arctan\frac{x+1}{|x-1|} \neq -\frac{\pi}{4}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \text{ e } \frac{x+1}{|x-1|} \neq -1\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\},$$

perché l'equazione $x+1=-|x-1|$ non ha soluzioni. La funzione risulta positiva se e solo se $\arctan\frac{x+1}{|x-1|} > -\frac{\pi}{4}$, $x\in D$, cioè se e solo se $x+1>-|x-1|$, $x\in D$. Quest'ultima disequazione è evidentemente verificata da ogni $x\in D, x>1$, mentre per $x<1$ è equivalente a $x+1>x-1$, che è pure verificata. Di conseguenza, $f(x)>0$ per ogni $x\in D$.
Si ha

$$\lim_{x\to 1}\arctan\frac{x+1}{|x-1|}=\frac{\pi}{2},$$

per cui

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+1}{|x-1|}}=\frac{1}{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3\pi},$$

quindi f è prolungabile con continuità ad $x=1$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{x+1}{|x-1|}=\frac{\pi}{4},$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{2}{\pi},$$

quindi $y=2/\pi$ è un asintoto orizzontale per $x\to+\infty$, mentre

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\arctan\frac{x+1}{|x-1|}+\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\arctan\frac{x+1}{-x+1}+\frac{\pi}{4}\right)=0^+,$$

e quindi

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.$$

Studio dell'asintoto obliquo per $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+1}{-x+1}\right)}.$$

Conviene calcolare prima il limite del denominatore:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+1}{-x+1}\right)\right)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x+1}{-x+1}}{\frac{1}{x}}\\(H)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}}{\frac{-1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2}{2(1+x^2)}=-1,\end{aligned}\tag{4}$$

per cui

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1.$$

Per calcolare il termine noto, passiamo attraverso lo sviluppo asintotico di $\arctan y$ per $y\to-1$, che calcoliamo preliminarmente. Si ha

$$\arctan y=-\frac{\pi}{4}+\frac{y+1}{2}+\frac{(y+1)^2}{4}+o(y+1)^2,\qquad y\to-1,$$

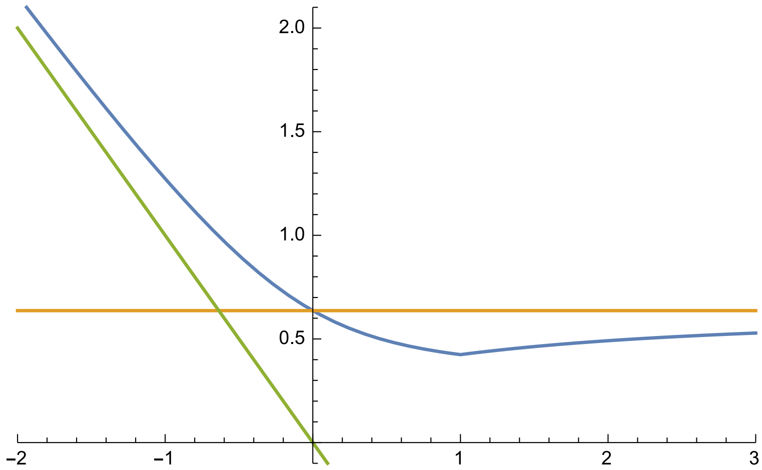


Figura 51: Il grafico di f (Tema 1).

da cui si ricava, per $x \to -\infty$,

$$\begin{aligned}\arctan\frac{x+1}{-x+1} &= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\Big(\frac{x+1}{-x+1}+1\Big) + \frac{1}{4}\Big(\frac{x+1}{-x+1}+1\Big)^2 + o\Big(\frac{x+1}{-x+1}+1\Big)^2\\ &= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{-x+1} + \Big(\frac{1}{-x+1}\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{-x+1}\Big)^2.\end{aligned}$$

Perciò

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(f(x)+x\Big) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{x}{-x+1}+\frac{x}{(-x+1)^2}+o\big(\frac{x}{(-x+1)^2}\big)}{\frac{1}{-x+1}+o\big(\frac{1}{-x+1}\big)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{(-x+1)^2}+o\big(\frac{1}{x}\big)}{\frac{1}{-x+1}+o\big(\frac{1}{-x+1}\big)} = 0.$$

Quindi $y=-x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
(b) f è sicuramente derivabile per ogni $x \in D$, in quanto composta di funzioni elementari derivabili. Si ha

$$f'(x) = -f^2(x)\frac{|x-1|-(x+1)\operatorname{sgn}(x-1)}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \begin{cases} f^2(x)\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} & \text{per } x>1\\ -f^2(x)\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} & \text{per } x<1,\end{cases}$$

quindi f è strettamente decrescente in $]-\infty,1[$ e strettamente crescente in $]1,+\infty[$. Il punto $x=1$ è perciò il punto di minimo assoluto, con $f(1)=\frac{4}{3\pi}$. Restano da studiare i limiti di f' per $x \to 1^{\pm}$. Si ha

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \frac{8}{9\pi^2} = -\lim_{x\to1^-} f'(x).$$

Pertanto 1 è un punto angoloso.
(c) Il grafico è in figura 51.

Esercizio 2 Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{\big(\log(x-3)\big)^n}{n-1}$$

converga, risp. converga assolutamente.

Svolgimento. La serie è definita per $x > 3$. Per tali x studiamo la convergenza assoluta con il criterio asintotico della radice. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}\,|\log(x-3)| = |\log(x-3)|.$$

Pertanto, per $e^{-1}+3 < x < e+3^1$ la serie converge assolutamente e quindi semplicemente, mentre per $3 < x < e^{-1}+3$ e per $x > e+3$ il termine generale della serie non è infinitesimo, e quindi la serie diverge assolutamente e non converge semplicemente. Per $x = e^{-1}+3$, cioè per $\log(x-3) = -1$, la serie converge per il criterio di Leibniz e diverge assolutamente perché il termine generale è asintotico a $\frac{1}{n}$. Per $x = e+3$, cioè per $\log(x-3) = 1$, la serie ha termini positivi e diverge perché il termine generale è asintotico a $\frac{1}{n}$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/2} \big(\arcsin 2x\big)^2 dx$$

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \big(\arcsin 2x\big)^2 dx &= [\text{ponendo } 2x = t]\ \ \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin^2 t\, dt \\
&= [\text{per parti}]\ \ \frac{1}{2}\Big[t\arcsin^2 t|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\Big] \\
&= [\text{ancora per parti}]\ \ \frac{\pi^2}{8} - \Big[-\sqrt{1-t^2}\,\arcsin t|_0^1 + \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\Big] \\
&= \frac{\pi^2}{8} - 1.
\end{aligned}$$

In alternativa, si poteva eseguire la sostituzione $2x = \sin t$, da cui $dx = \frac{1}{2}\cos t\, dt$. Siccome nell'intervallo di integrazione $\arcsin\sin t = t$, l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \big(\arcsin 2x\big)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\, dt &= [\text{per parti}]\ \ \frac{1}{2}\Big[t^2\sin t|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} t\sin t\, dt\Big] \\
&= [\text{ancora per parti}]\ \ \frac{\pi^2}{8} + \Big[t\cos t|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos t\, dt\Big] \\
&= \frac{\pi^2}{8} - 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z+1}{\bar z}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determini e si disegni sul piano di Gauss l'insieme

$$A = \big\{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\big\}.$$

Svolgimento. Se $z \neq 0$, la condizione $f(z) = z$ equivale a $z+1 = \bar z z$, cioè, ponendo $z = x+iy$, equivale a

$$x + 1 + iy = x^2 + y^2,$$

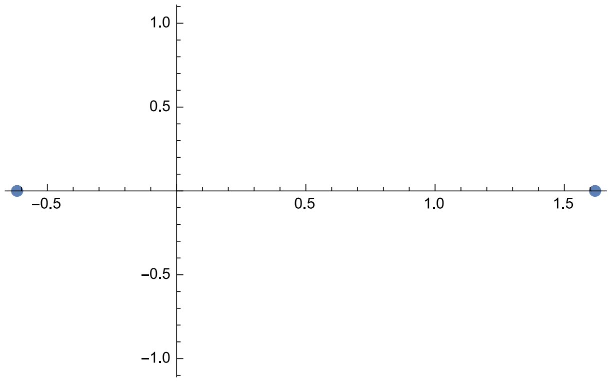


Figura 52: Le soluzioni dell'esercizio 4 (Tema 1).

che implica $y = 0$ e $x^2 - x - 1 = 0$ cioè $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (v. figura 52).

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^{-t} - 1}{t} \, dt.$$

Calcolare lo sviluppo di Taylor di f di ordine 2 con punto iniziale 0.

Svolgimento. Si ha che $f(0) = 0$ e inoltre, per ogni x fissato, preso un punto c compreso tra x^2 e $2x^2$, si ha

$$f(x) = -\int_{c}^{x^2} \frac{e^{-t} - 1}{t} \, dt + \int_{c}^{2x^2} \frac{e^{-t} - 1}{t} \, dt.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo e il teorema sulla derivata della funzione composta si ha perciò

$$f'(x) = -2x \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} + 4x \frac{e^{-2x^2} - 1}{2x^2} = 2 \frac{e^{-2x^2} - e^{-x^2}}{x}.$$

Siccome

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0,$$

risulta $f'(0) = 0$. Si ha inoltre

$$f''(x) = 2 \frac{e^{-x^2}(1 + 2x^2) - e^{-2x^2}(1 + 4x^2)}{x^2} \longrightarrow -2 \quad \text{per } x \to 0,$$

quindi $f''(0) = -2$. Lo sviluppo richiesto è perciò

$$f(x) = -x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0.$$

Appello del 15.02.2016

TEMA 1

[1] molti studenti hanno sbagliato la semplice disequazione $|\log(x-3)| < 1$, scrivendo che le soluzioni sono $-e+3 < x < e+3$!

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|\sin x|}{\cos x}\right)$$

nell'intervallo $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.

(a) Determinare il dominio D di f in I e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti

RISPOSTA

Dominio.

Per dominiosi intende ovviamente il sottoinsieme massimale$D \subseteq I$ per cui $f(x)$ è definita per ogni $x \in D$. Poiché $\log r$ è definito se e solo se $r > 0$, si deve avere $\frac{|\sin x|}{\cos x} > 0$. Perché il membro sinistro sia definito deve essere $\cos x \neq 0$. Dunque $x \in D$ se e solo se

$$\begin{cases} |\sin x| > 0 \\ \cos x > 0 \\ x \in I \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x > 0 \\ x \in I \end{cases} \iff x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$$

ovvero

$$D = \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\bigcup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Segno.

$f(x) > 0$ se e solo se $\frac{|\sin x|}{\cos x} > 1$, cioè $|\tan x| > 1$, vale a dire

$$x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[\bigcup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\frac{\pi}{4}$. (Dunque $f(x) < 0$ se e solo se $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\bigcup \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

La funzione è continua (in ogni punto del dominio) in quanto composizione di funzioni continue. Non possono esserci asintoti orizzontali o obliqui, essendo il dominio limitato. Studiamo i limiti in 0 e $\pm\frac{\pi}{2}$. Si ha evidentemente

$$\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

dunque ci sono tre asintoti vertical: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$

(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

RISPOSTA La funzione è derivabile in ogni punto di D (che è un insieme aperto, cioè costituito di punti interni) in quanto composizione di funzioni derivabili (infinite volte). Inoltre, da $f(x) = \log(|\tan x|)$,

$$f'(x) = \frac{1}{|\tan x|} \frac{\operatorname{sgn}(\tan x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$$

Dunque f strettamente crescente in $]0, \frac{\pi}{2}[$ e strettamente decrescente in $]-\frac{\pi}{2}, 0[$. Inoltre

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0-} f'(x) = -\infty$$

La funzione non ha né massimi né minimi, essendo ovunque derivabile con derivata diversa da zero;

(c) calcolare f'' e studiare la convessità e la concavità di f, determinandone gli eventuali punti di flesso;

RISPOSTA

$$f''(x) = -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

Dunque $f''(x) > 0$ se e solo se $\sin^2 x > \cos^2 x$, se e solo se , $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[\bigcup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ mentre $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\frac{\pi}{4}$

Perciò le restrizioni della funzione algli intervalli $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[$ e $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ sono convesse, mentre le restrizioni agli intervalli $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ e $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ sono concave. Si hanno flessi in $x=-\frac{\pi}{4}$ e in $x=\frac{\pi}{4}$.

(d) Si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendo per periodicità il grafico di f in I).

RISPOSTA

Il grafico di f è in figura 53

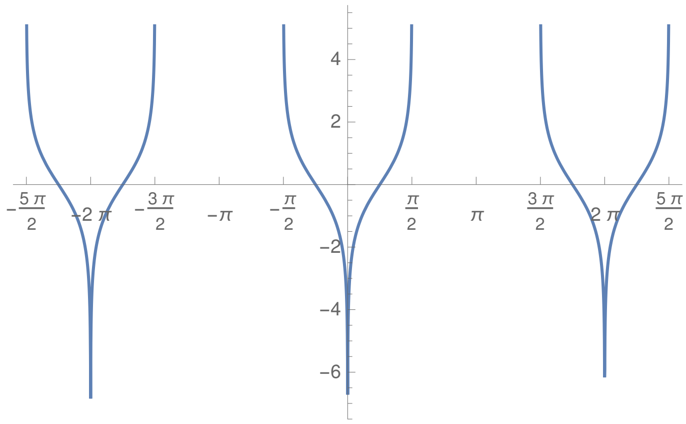


Figura 53: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x - \frac{9}{2}(\arctan\frac{x}{3})^3}{x - \sinh x + e^{-\frac{1}{x}}}$$

Svolgimento. Si osserva dapprima che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^+$ si ha $e^{-\frac{1}{x}} = o(x^\alpha)$ per $x \to 0^+$ (basta, ad esempio, operare la sostituzione $y = 1/x$ e ricordare che $\lim_{y\to+\infty} \frac{y^\alpha}{e^\alpha} = 0$). Dopodiché:

$$\frac{x^\alpha - \sin x - \frac{9}{2}(\arctan\frac{x}{3})^3}{x - \sinh x + e^{-\frac{1}{x}}} =$$

$$\frac{x^\alpha - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{9}{2}\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x - x - \frac{1}{6}x^3 + e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{x^\alpha - x + o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$$

Se $\alpha = 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x - \frac{9}{2}(\arctan\frac{x}{3})^3}{x - \sinh x + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = 0$$

Se $\alpha < 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x - \frac{9}{2}(\arctan\frac{x}{3})^3}{x - \sinh x + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = -\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-3} = -\infty$$

Se $1 < \alpha$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x - \frac{9}{2}(\arctan\frac{x}{3})^3}{x - \sinh x + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x + o(x)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0^+} x^{-2} = +\infty$$

Esercizio 3 Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{\left(\sin\left(\sqrt{1-x}\right)\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{x^{\alpha+1}(1+x)^{\frac{3}{2}+\alpha}}$$

Si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f_\alpha(x)dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ e lo si calcoli per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Svolgimento. Si noti che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il dominio di f_α contiene l'intervallo $]0,1[$, per cui bisogna controllare la convergenza dell'integrale per entrambi gli estremi. Per x che tende (da destra) a 0 si ha

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

Per x che tende (da sinistra) a 1 si ha

$$f_\alpha(x) \sim \left(\sin\left(\sqrt{1-x}\right)\right)^{\frac{1}{2}+\alpha} \sim (1-x)^{\frac{1+2\alpha}{4}}$$

Pertanto l'integrale converge se e solo se

$$\begin{cases} \alpha+1<1 \\ \frac{1+2\alpha}{4} > -1 \end{cases}$$

cioè se e solo se $\alpha \in]-\frac{5}{2},0[$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = -\frac{1}{2}$.
Calcoliamo la primitiva:

$$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1+x)}dx \underset{y=x^{\frac{1}{2}}}{=} 2\int \frac{y}{y(1+y^2)}dy = 2\arctan y + c.$$

Dunque (nel seguito, l'estremo $\frac{1}{2}$ può essere sostituito da un qualsiasi altro punto dell'intervallo $]0,1[$)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1+x)}dx = \lim_{c\to 0}\int_c^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1+x)}dx + \lim_{d\to 1}\int_{\frac{1}{2}}^{d} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1+x)}dx =$$

$$2\lim_{c\to 0}\int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{y}{y(1+y^2)}dy + 2\lim_{d\to 1}\int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{d}} \frac{y}{y(1+y^2)}dy =$$

$$2\lim_{c\to 0}\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \arctan\left(\sqrt{c}\right)\right) + 2\lim_{d\to 1}\left(\arctan\left(\sqrt{d}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right) =$$

$$2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 4 Determinare tutte le soluzioni dell'"equazione

$$\bar{z}^2 = 2iz, \qquad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

Svolgimento. Ponendo $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$, l'equazione diventa

$$x^2 - y^2 - 2ixy = 2ix - 2y$$

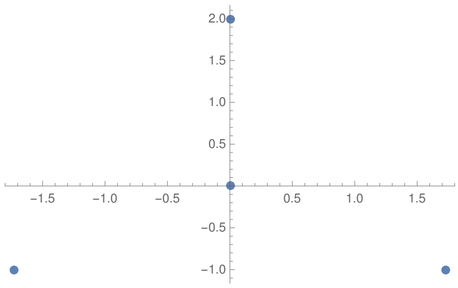


Figura 54: Le soluzioni dell'Esercizio 4 (Tema 1).

cioè

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2y \\ -xy = x \end{cases}$$

Le soluzioni di quest'ultimo sistema sono $(0,0)$, $(0,2)$ $(\sqrt{3},-1)$, $(-\sqrt{3},-1)$, dunque le soluzioni dell'equazione sono $z_1 = 0$ e $z_2 = 2i$, $z_3 = \sqrt{3} - i$, $z_4 = -\sqrt{3} - i$, rappresentate in figura 54.

Esercizio 5 [facoltativo] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha}\, dx$$

e calcolarlo per tali α.

Svolgimento Per $\alpha \notin [0,2]$ l'integrale non è improprio perché $f \in C^0([0,2])$. Inoltre, per $\alpha = 0$, la funzione può essere estesa per continuità in $x = 0$ quindi nuovamente non si tratta di un integrale improprio. Consideriamo $\alpha \in (0,2]$. Osserviamo che vale

$$f(x) = \frac{x^2}{|x-\alpha|^\alpha |x^2 + \alpha x + \alpha^2|^\alpha};$$

poiché $f \in C^0([0,2))$ se $\alpha = 2$ e $f \in C^0([0,\alpha) \cup (\alpha,2])$ se $\alpha \in (0,2)$, basta studiare il comportamento asintotico di f per $x \to \alpha$. Abbiamo

$$f(x) \sim \frac{\alpha^2}{3\alpha^{2\alpha}} \frac{1}{|x-\alpha|^\alpha} \qquad \text{per} \qquad x \to \alpha;$$

essendo l'integrale a destra convergente se e solo se $\alpha < 1$, il teorema del confronto asintotico assicura che il nostro integrale è convergente se e solo se $\alpha < 1$.

In conclusione, l'integrale converge per $\alpha \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ e diverge altrimenti.

Calcolo dell'integrale.

Se $\alpha \le 0$ abbiamo

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{(x^3-\alpha^3)^\alpha} dx = (x^3 - \alpha^3 = t) = \frac{1}{3}\int_{-\alpha^3}^{8-\alpha^3} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{3}\left[\frac{(8-\alpha^3)^{-\alpha+1} - (-\alpha^3)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right].$$

Se $\alpha > 2$ abbiamo

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{(-x^3+\alpha^3)^\alpha} dx = (-x^3 + \alpha^3 = t) = -\frac{1}{3}\int_{\alpha^3}^{-8+\alpha^3} \frac{1}{t^\alpha} dt$$
$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{(-8+\alpha^3)^{-\alpha+1} - (\alpha^3)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right].$$

Se $\alpha \in (0,1)$, abbiamo

$$\int_0^2 f(x)dx = \lim_{a\to\alpha^-}\int_0^a f(x)dx + \lim_{b\to\alpha^+}\int_b^2 f(x)dx = \lim_{a\to\alpha^-}\int_0^a \frac{x^2}{(-x^3+\alpha^3)^\alpha}dx + \lim_{b\to\alpha^+}\int_b^2 \frac{x^2}{(x^3-\alpha^3)^\alpha}$$
$$= -\lim_{a\to\alpha^-}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{(-a^3+\alpha^3)^{-\alpha+1}-(\alpha^3)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\right] + \lim_{b\to\alpha^+}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{(8-\alpha^3)^{-\alpha+1}-(b^3-\alpha^3)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\frac{(\alpha^3)^{-\alpha+1}+(8-\alpha^3)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}.$$

Appello del 11.07.2016

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x-2)|3-x|}.$$

a) Determinare il dominio, calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

b) Studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f'.

c) Studiare la concavità e la convessità di f.

d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento.

(a) Il dominio di f è dato dai punti ove il radicando è nonnegativo (si osservi che il radicando è definito su tutto $\mathbb{R}$). Quindi si ha

$$\mathrm{dom}(f) = [2,+\infty).$$

Svolgendo il modulo, la funzione f può essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2+5x-6} & \text{per } 2 \le x \le 3 \\ \sqrt{x^2-5x+6} & \text{per } x > 3. \end{cases}$$

Osserviamo anche che per la continuità della radice e del modulo e per il teorema sulla continuità della funzione composta, si ha: $f \in C^0([2,+\infty))$. In particolare, abbiamo $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 0$. L'unico limite significativo è $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Ricerca degli asintoti. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-5/x+6/x^2}}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-5x+6}-x\right]\frac{\sqrt{x^2-5x+6}+x}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} = \frac{-5x+6}{x\sqrt{1-5/x+6/x^2}+x} = -\frac{5}{2}$$

La retta $y = x - 5/2$ è perciò asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

(b). Per i teoremi sulla derivabilità della funzione composta (ricordarsi che $g(y) = \sqrt{y}$ è derivabile solo su $(0, +\infty)$), abbiamo che f è sicuramente derivabile su $(2, 3) \cup (3, +\infty)$ e verifica

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x-6}} & \text{per } 2 < x < 3 \\ \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}} & \text{per } x > 3. \end{cases}$$

Ne deduciamo:

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 3^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f'(x) = 1;$$

in particolare, f non è derivabile né in $x = 2$ né in $x = 3$. Inoltre, $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \in (2, 5/2] \cup (3, +\infty)$. I punti di estremo relativo sono: $x = 5/2$ (perché $f'(5/2) = 0$ ed f' vi cambia segno), $x = 2$ e $x = 3$ (perché ivi $f = 0$ e la f è sempre nonnegativa). Quindi, f è crescente in $(2, 5/2]$ ed in $[3, +\infty)$ mentre è decrescente su $[5/2, 3]$; $x = 2$ e $x = 3$ sono punti di minimo relativo ed assoluto, $x = 5/2$ è punto di massimo relativo mentre non esiste un punto di massimo assoluto.

(c) Per $x \in (2, 3) \cup (3, +\infty)$ si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-2\sqrt{-x^2+5x-6} - (-2x+5)\frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x-6}}}{2(-x^2+5x-6)} = \frac{-1}{4(-x^2+5x-6)^{3/2}} & \text{per } 2 < x < 3 \\ \frac{2\sqrt{x^2-5x+6} - (2x-5)\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}}{2(x^2-5x+6)} = \frac{-1}{4(x^2-5x+6)^{3/2}} & \text{per } x > 3. \end{cases}$$

La funzione è dunque concava in $[2, 3]$ e in $[3, +\infty)$.
d) Il grafico di f, con l'asintoto, è in figura 55.

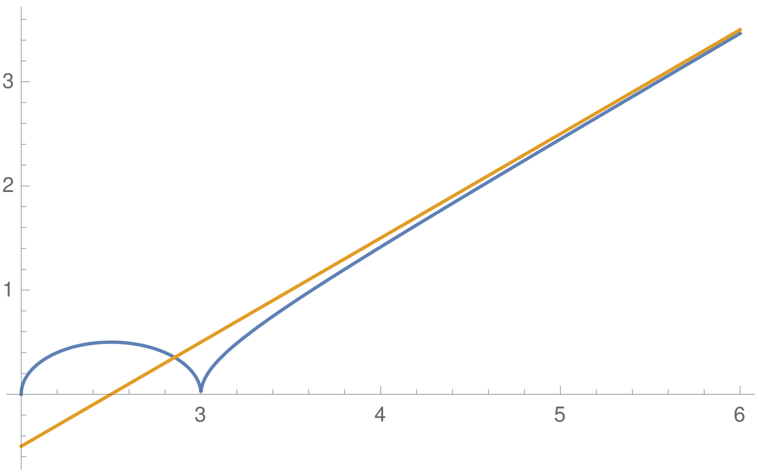


Figura 55: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos \arctan x - \cos x}{\log(1 + x^2) - \sin(\alpha x^2)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Ricordiamo che, per $y \to 0$, valgono le seguenti formule

$$\begin{aligned}
\cos y &= 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5) \\
\arctan y &= y - \frac{y^3}{3} + o(y^4) \\
\sin(y) &= y - \frac{y^3}{6} + o(y^4) \\
\log(1+y) &= y - \frac{y^2}{2} + o(y^2).
\end{aligned}$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}
\cos \arctan x &= \cos\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^4 + o\left[\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^5\right] \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^4 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x^4\right) + \frac{1}{24}(x^4) + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Ne deduciamo

$$\text{Numeratore} = \frac{1}{3}x^4 + o(x^5).$$

Dall'altra parte abbiamo

$$\begin{aligned}
\text{Denumeratore} &= \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right) + \left(-\alpha x^2 + o(\alpha^2 x^4)\right) \\
&= (1-\alpha)x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Concludiamo

$$\lim_{x\to 0} \cdots = \begin{cases} 0 & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{3} & \alpha = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3 [9 punti] Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente

$$\int_0^{\pi/8} \frac{\sin 2x}{|\log(\cos 2x)|^\alpha \cos 2x}\, dx$$

e calcolarne il valore per $\alpha = 1/2$.

Svolgimento. Convergenza. Osserviamo che, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f è continua e nonnegativa in $(0, \pi/8]$. Rimane da studiarne il comportamento per $x \to 0^+$. Per $x \to 0^+$, usando l'asintoticità delle componente della f e gli sviluppi di Taylor, si ha

$$\begin{aligned}
f(x) \sim &\frac{2x}{(-\log(\cos 2x))^\alpha} = \frac{2x}{(-\log(1 - 2x^2 + o(x^3)))^\alpha} = \frac{2x}{(-(-2x^2 + o(x^3)) + o[(-2x^2 + o(x^3))])^\alpha} \\
= &\frac{2x}{(2x^2 + o(x^2))^\alpha} = \frac{2^{1-\alpha}}{x^{2\alpha-1}\,(1 + o(1))^\alpha} \sim \frac{2^{1-\alpha}}{x^{2\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

Per confronto con la funzione $1/x^\beta$, concludiamo che l'integrale è convergente se, e solo se, $2\alpha - 1 < 1$ cioè $\alpha < 1$.

Calcolo. Per $\alpha = 1/2$ si ha

$$\int_0^{\pi/8} f(x)\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{\pi/8} \frac{\sin 2x}{\sqrt{-\log(\cos 2x)}\cos 2x}\,dx;$$

operando la sostituzione $t = -\log(\cos 2x)$ (quindi "$dt = 2\frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx$"), si ottiene

$$\int_0^{\pi/8} f(x)\,dx = \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{2}\int_a^{\log 2/2} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\lim_{a\to 0^+}\left[2\sqrt{t}\right]_a^{\log 2/2} = \sqrt{\frac{\log 2}{2}}.$$

Esercizio 4 [4 punti] Risolvere nel piano complesso l'equazione

$$2\bar{z}^3 = 3i,$$

rappresentandone le soluzioni in forma algebrica.

Svolgimento. Passando al coniugato di entrambi i membri dell'equazione otteniamo

$$z^3 = -\frac{3}{2}i;$$

quindi $|z| = \sqrt[3]{3/2}$ mentre $arg(z) = (\frac{3}{2}\pi + 2k\pi)/3$ con $k = 0, 1, 2$ cioè $arg(z) = \pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6$. In conclusione

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}e^{i\pi/2} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}i,\\
z_2 &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}e^{i7\pi/6} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right),\\
z_3 &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}e^{i11\pi/6} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right),
\end{aligned}$$

che si rappresentano nel piano di Gauss come segue:

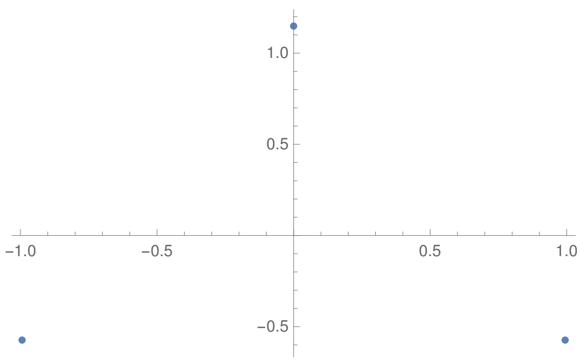


Figura 56: Soluzione dell'esercizio 4 (Tema 1).

Appello del 19.09.2016

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(2e^{2|x|} - e^{|x|} - 1\right).$$

a) Determinare il dominio e le eventuali simmetrie, calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

b) Studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f.

c) Studiare il segno e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f.

d) **(Facoltativo, vale 2 punti in più)** Studiare la concavità e la convessità di f.

e) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (a) f è visibilmante pari, per cui la studiamo per $x \geq 0$. Il dominio è dato dagli $x(\geq 0)$ per i quali $2e^{2x} - e^x - 1 > 0$. Ponendo $e^x = y$, si ha $2y^2 - y - 1 > 0$, che ha per soluzioni $1, -\frac{1}{2}$. Tenendo conto che $y > 0$, le soluzioni sono $y > 1$, che corrisponde a $x > 0$ (cioè $x \neq 0$ su tutta la retta reale).
Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} = +\infty.$$

Per quanto riguarda il posssibile asintoto obliquo, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log e^{2x} + \log(2 - e^{-x} - e^{-2x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \log(2 - e^{-x} - e^{-2x})}{x} = 2$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x\to+\infty} [2x + \log(2 - e^{-x} - e^{-2x}) - 2x] = \log 2.$$

La retta $y = 2x + \log 2$ è perciò asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
(b) e (c) In tutti i punti del dominio si possono applicare le regole di derivazione, quindi f è derivabile e la sua derivata, per $x > 0$, è

$$f'(x) = \frac{4e^{2x} - e^x}{2e^{2x} - e^x - 1}.$$

Siccome il denominatore, per $x > 0$, è > 0, il segno di f' dipende solo dal segno di $4e^{2x} - e^x$, cioè, per $x > 0$ si ha che $f'(x) > 0$ sempre. Quindi f è strettamente crescente per $x > 0$ ed è positiva se e solo se $2e^{2x} - e^x - 1 > 1$, cioè se e solo se $x > \log(1 + \sqrt{17}) - 2\log 2$.
(d) Per $x > 0$ si ha

$$f''(x) = \frac{-2e^{3x} - 8e^x + e^x}{(2e^{2x} - e^x - 1)^2},$$

il cui segno dipende solo dal numeratore. L'equazione $-2y^3 - 8y^2 + y = 0$ non ha soluzioni positive, per cui $-2e^{3x} - 8e^x + e^x < 0$ per ogni $x > 0$. La funzione risulta quindi concava per $x > 0$.
(e) Il grafico di f, con i due asintoti, è in Figura 57.

Esercizio 2 Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{n(x^2-x)}\right)^n}{n+1}$$

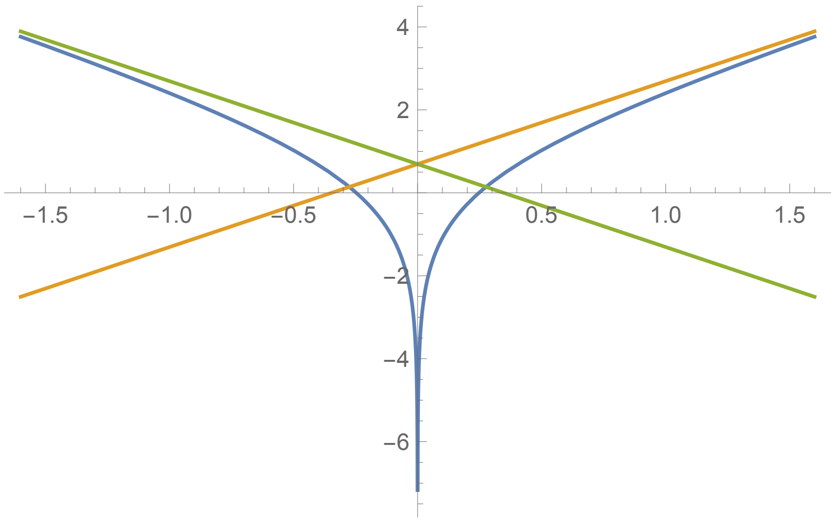


Figura 57: Il grafico di f (Tema 1).

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Convergenza assoluta: conviene usare il criterio della radice. La serie converge assolutamente se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{n(x^2-x)}\right|}{\sqrt[n]{n+1}} < 1,$$

mentre diverge assolutamente e non converge (perché il termine generale non è infinitesimo) se tale limite è maggiore di 1. Il valore del limite è

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{n(x^2-x)}\right| = \begin{cases} \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} & \text{se } x^2 - x < 0 \\ \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right| = 1 & \text{se } x^2 - x = 0 \\ \left|\frac{1}{2} - \infty\right| = +\infty & \text{se } x^2 - x > 0. \end{cases}$$

La serie pertanto converge assolutamente, e quindi converge, se $0 < x < 1$, mentre diverge assolutamente e non converge se $x < 0$ oppure $x > 1$.
Resta da studiare la convergenza per $x = 0$ e e per $x = 1$. In entrambi i casi la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

che converge per il criterio di Leibniz e diverge assolutamente per confronto con la serie armonica.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 |x-1| \log x \, dx.$$

Svolgimento. Si tratta di un integrale improprio in $x = 0$. Allora si ha

$$\int_0^2 |x-1| \log x \, dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 (1-x) \log x \, dx + \int_1^2 (x-1) \log x \, dx.$$

Osserviamo che vale

$$\int (x-1)\log x\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\log x - \frac{x^2}{4} + x + c.$$

Concludiamo

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x-1|\log x\,dx &= -\lim_{a\to 0^+}\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\log x - \frac{x^2}{4} + x\right]\Bigg|_a^1 \\ &\qquad + \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\log x - \frac{x^2}{4} + x\right]\Bigg|_1^2 \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Risolvere la disequazione

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right| \le 1$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento. Osserviamo che z deve essere diverso da 0. Si ha

$$\left|\frac{\bar{z} - z}{z\bar{z}}\right| \le 1.$$

Ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ risulta (ricordando che $z\bar{z} = |z|^2$ e che $z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}\, z$)

$$\frac{2|y|}{x^2 + y^2} \le 1.$$

La disequazione è pari rispetto a y (e a x). La risolviamo perciò per $y \ge 0$ e poi operiamo una riflessione rispetto all'asse x. La disequazione, per $y \ge 0$ è equivalente a $x^2 + y^2 - 2y \ge 0$, cioè $x^2 + (y-1)^2 \ge 1$, che descrive l'esterno della circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 1. Le soluzioni sono rappresentate nella Figura 58.

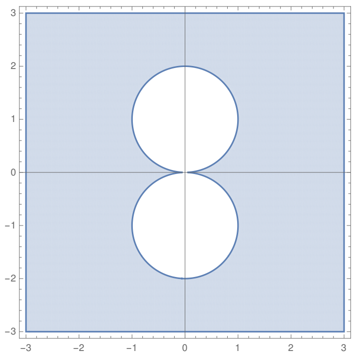


Figura 58: Le soluzioni dell'Esercizio 4 (Tema 1).

2.3 Ulteriori esercizi (a cura di C. Sartori)

FUNZIONI

Esercizio. Determinare, al variare di $\lambda > 1$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\lambda^x = x^\lambda.$$

Soluzione. L'equazione (che ha la soluzione λ) è equivalente a

$$x \log \lambda = \lambda \log x.$$

Posto $f(x) = x \log \lambda$, $g(x) = \lambda \log x$, si ha $f'(x) = \log \lambda$, $g'(x) = \frac{\lambda}{x}$ e quindi le due funzioni sono tangenti se

$$\begin{cases} x \log \lambda = \lambda \log x \\ \log \lambda = \frac{\lambda}{x}. \end{cases}$$

Si ricava $\lambda = \lambda \log x$ cioè $x = e$ e quindi $\log \lambda = \frac{\lambda}{e}$ da cui $\lambda = e$. La funzione $\log x$ è tangente alla retta $y = \frac{\log \lambda}{\lambda} x$ se $\lambda = e$. Il coefficiente angolare della retta ha un massimo per $\lambda = e$ e quindi confrontando il grafico di $\log x$ con quello della retta $y = \frac{\log \lambda}{\lambda} x$ si ottengono sempre due soluzioni $\forall \lambda > 1$. Per $\lambda = e$ si ha una sola soluzione.

Esercizio Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 3x^4 + 4(2a - a^2)x^3 - 12a^3x^2 + a^6,$$

dove $a > 0$ è un parametro fissato. Determinare
a) i punti di massimo e minimo di f e i valori di f in tali punti;
$x = -2a, a^2$ punti di minimo; $x = 0$ punto di massimo; $f(-2a) = -16a^4 - 16a^5 + a^6$, $f(a^2) = -a^8 - 4a^7 + a^6$ $f(0) = a^6$.

b) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha 2 zeri positivi;
Basta imporre $f(a^2) < 0$ che implica $a > -2 + \sqrt{5}$;

c) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha non piu' di uno zero negativo;
Basta imporre $f(-2a) \geq 0$ che implica $a \geq 8 + \sqrt{80}$.

d) i valori di $a \geq 0$ per cui f è convessa.
$a = 0$

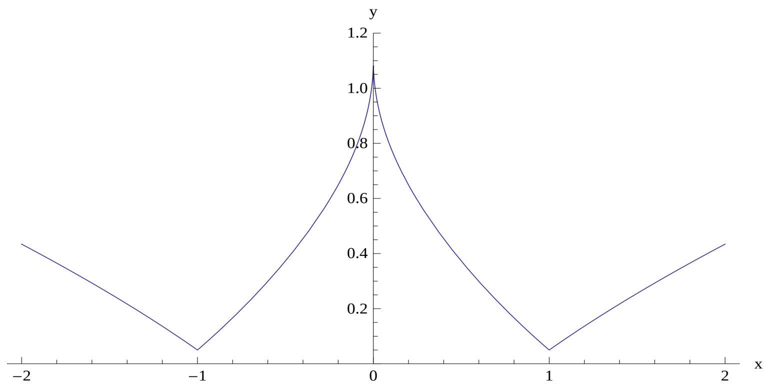
Esercizio. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{10(1 + x^2)} + \left|1 - \sqrt{|x|}\right| = \lambda.$$

Soluzione. Studio la funzione $f(x) = \frac{1}{10(1+x^2)} + \left|1 - \sqrt{|x|}\right|$ è pari e quindi basta studiarla per $x \geq 0$. Si ha $f(0) = \frac{11}{10}$, $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{10(1+x^2)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ \frac{-2x}{10(1+x^2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 1. \end{cases}$$

f è decrescente in $(0, 1)$ e crescente in $(1, +\infty$, quindi $x = 0$ è punto di massimo relativo e $x = 1$ è punto di minimo assoluto. Il grafico è porta alle soluzioni



$$\begin{cases} \lambda < \frac{1}{20} & \text{nessuna soluzione} \\ \lambda = \frac{1}{20} & \text{2 soluzioni} \\ \frac{1}{20} < \lambda < \frac{11}{10} & \text{4 soluzioni} \\ \lambda = \frac{11}{10} & \text{3 soluzioni} \\ \lambda > \frac{11}{10} & \text{2 soluzioni.} \end{cases}$$

Esercizio Data la funzione

$$f(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x - 1,$$

determinare per quali valori di $a > 0$

a) $f(x)$ ha esattamente tre zeri;

b) tali zeri sono tutti positivi.

Soluzione.

a)
$$f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \iff x = \frac{a}{2},\ x = \frac{a}{6}.$$

$x = \frac{a}{2}$ è punto di massimo e $x = \frac{a}{6}$ è punto di minimo. Per avere tre zeri si deve imporre $f(\frac{a}{2}) < 0 < f(\frac{a}{6})$ che è verificato se e solo se $a > \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

b) Poichè $f(0) = -1 < 0$ per $0 < x < \frac{a}{6}$ c'è uno zero, cosi' come ce ne è uno in $(\frac{a}{6}, \frac{a}{2}$ e infine un terzo per $x > \frac{a}{2}$ dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Esercizio. Data la funzione

$$f_a(x) = x^a - ax^2, \quad a > 0,$$

calcolare $\sup\{f_a(x),\, x \geq 0\}$ e $\inf\{f_a(x),\, x \geq 0\}$, specificando se sono massimo o minimo.

Soluzione.

$$a > 2 \ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty = \sup\{f_a(x),\, x \geq 0\};$$

$$a \leq 2 \ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty = \inf\{f_a(x),\, x \geq 0\}.$$

Si ha $f_a'(x) = ax^{a-1} - 2ax = 0 \iff x = 0,\ 2^{\frac{1}{a-2}}$ se $a \neq 2$. $2^{\frac{1}{a-2}}$ è di minimo se $a > 2$, di massimo se $a < 2$. Quindi

$$a > 2 \ \Rightarrow \min\{f_a(x),\, x \geq 0\} = 2^{\frac{a}{a-2}} - a2^{\frac{2}{a-2}};$$

$$a < 2 \ \Rightarrow \ \max\{f_a(x),\, x \geq 0\} = 2^{\frac{a}{a-2}} - a2^{\frac{2}{a-2}};$$
$$a = 2 \ \Rightarrow \ \max\{f_2(x),\, x \geq 0\} = 0.$$

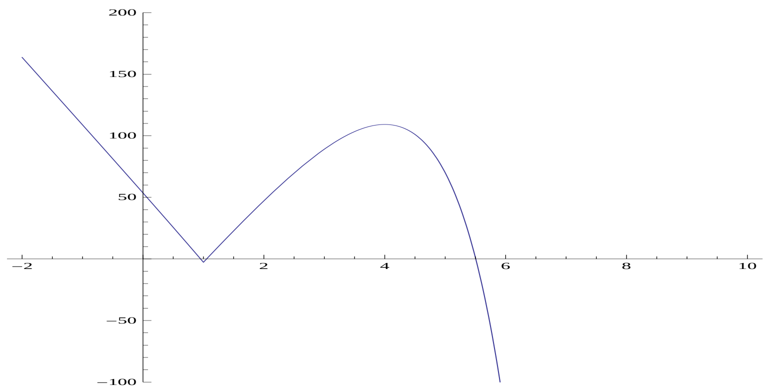
Esercizio. Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$-\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4|x-1| = \lambda.$$

Sol. Studio la funzione
$$f(x) = -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4|x-1|.$$
$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4, & \text{per } x > 1 \\ -\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^4, & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

C'è un punto di max in $(4, 2\mathrm{e}^4)$ e un punto di min. (angoloso) in $(1, -\mathrm{e})$. Quindi



$$\begin{cases} \lambda > 2\mathrm{e}^4,\ \lambda < -\mathrm{e} & 1 \text{ sol.}, \\ -\mathrm{e} < \lambda < 2\mathrm{e}^4 & 3 \text{ sol.}, \\ \lambda = -\mathrm{e}, 2\mathrm{e}^4 & 2 \text{ sol..} \end{cases}$$

Esercizio. Sia
$$f(x) = \ln(x+4) + \frac{x+8}{x+4}.$$

- Calcolare gli intervalli di concavità e di convessità di f sul suo dominio naturale.
- Individuare il massimo intervallo A contenente -3 dove f risulti invertibile.
- Sia g la funzione inversa della f ristretta su A. Calcolare $g'(f(-3))$.

SOL. $\mathrm{Dom} f = \{x > -4\}$. $f'(x) = x/(4+x)^2$, $f''(x) = (4-x)/(4+x)^3$. Si ha $f''(x) > 0$ per $-4 < x < 4$ e ivi la funzione è convessa, per $x > 4$ concava. Il max intorno di -3 in cui f è monotona (decrescente) e quindi invertibile è $-4 < x < 0$. Si ha $f(-3) = 5$, e

$$g'(f(-3)) = \frac{1}{f'(-3)} = -\frac{1}{3}.$$

Esercizio. Studiare la convessità e concavità della funzione

$$F(x) = \int_2^x g(\sin t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove g è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ e tale che $g'(x) < 0$.

Soluzione Si ha

$$F'(x) = g(\sin x), \text{ e } F''(x) = g'(\sin x)\cos x,$$

da cui

$$F''(x) > 0 \iff \cos x < 0 \iff \frac{\pi}{2} + 2K\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$$

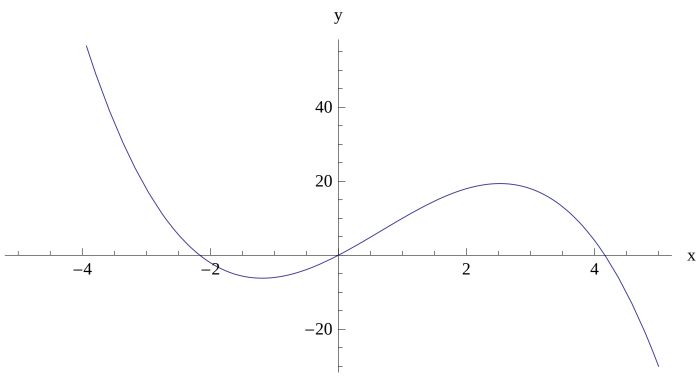
per K intero; nell'unione di tali intervalli F è convessa, e nel complementare è concava.

Esercizio. Studiare la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{(t+1)(3-t)}{\arctan(1+t^2)}\, dt,$$

specificando, in particolare, gli intervalli di crescenza e decrescenza. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ e tracciare un grafico qualitativo.

Soluzione. Si ha $F'(x) = \frac{(x+1)(3-x)}{\arctan(1+x^2)}$ e $F'(x) > 0 \iff -1 < x < 3$. $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} F'(x) = -\infty$, da cui si ricava $F'(x) < -1$ per $|x| > M$ e quindi $\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$. **Esercizio.** Determinare per $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$,



$$F(x) = \int_0^x [2t]\, dt$$

dove $[x]$ indica la funzione parte intera di x.

Soluzione.
Si ha

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 0\, dt = 0 \quad \text{per } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} 0 + \int_{\frac{1}{2}}^x 1\, dt = x - \frac{1}{2}, \quad \text{per} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \int_0^x -1\, dt = -x, \quad \text{per} -\frac{1}{2} \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Esercizio. Determinare se

$$F(x) = x - \int_0^x \frac{|\cos t|}{t^2+1}\, dt$$

ha un asintoto per $x \to +\infty$ e, in caso affermativo, calcolarne il coefficients angolare.
Soluzione. Si ha $F(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$, Inoltre usando la regola di De L'Hospital si ha $\lim_x \to +\infty \frac{F(x)}{x} = 1$. Si deve dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} F(x) + x \neq \pm\infty$. Si ha per $x > 0$

$$0 \leq \int_0^x \frac{|\cos t|}{t^2+1}\, dt = F(x) + x \leq \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\, dt < \pi/2.$$

LIMITI

Esercizio Calcolare i seguenti limiti (il terzo al variare di $\alpha \in \mathbb{Q}$),

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^6 - 3^6}{x^8 - 3^8} = 1/12, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + x^2}. = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2/3 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2/3 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2/3 \end{cases}$$

2) a) Determinare un polinomio $P(x)$ di grado al più due tale che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^2 - P(x)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = 0.$$

b) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)$$

dove $a > b > 0$ sono due numeri fissati.

c) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\sqrt[5]{k}}.$$

Sol. a) Per la formula di Taylor si ha, detta $f(x) = (\sin x)^2$

$$P(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

$$f'(x) = 2\sin x \cos x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$f''(x) = 2(\cos x)^2 - 2(\sin x)^2\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -2.$$

Da cui

$$P(x) = 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

b) $$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\log a}-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\log b}=(\log a-\log b)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)=\begin{cases}+\infty & \text{per } \alpha>1\\ \log a-\log b & \text{per } \alpha=1\\ 0 & \text{per } \alpha<1.\end{cases}$$

c) $$\int_2^{n+1}\frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\,dx\le\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}\le\int_1^{n}\frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\,dx$$

da cui

$$\frac{5}{4}\left((n+1)^{\frac{4}{5}}-2^{\frac{4}{5}}\right)\le\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}\le\frac{5}{4}\left(n^{\frac{4}{5}}-1\right)$$

da cui per confronto si ricava subito che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{\sqrt[5]{k}}=\frac{5}{4}.$$

Esercizio. Data la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=3x^4+4(2a-a^2)x^3-12a^3x^2+a^6,$$

dove $a>0$ è un parametro fissato. Determinare
a) i punti di massimo e minimo di f e i valori di f in tali punti;
$x=-2a, a^2$ punti di minimo; $x=0$ punto di massimo; $f(-2a)=-16a^4-16a^5+a^6$, $f(a^2)=-a^8-4a^7+a^6$
$f(0)=a^6$.

b) i valori di a per cui l'equazione $f=0$ ha 2 zeri positivi;
Basta imporre $f(a^2)<0$ che implica $a>-2+\sqrt{5}$;

c) i valori di a per cui l'equazione $f=0$ ha non piu' di uno zero negativo;
Basta imporre $f(-2a)\ge 0$ che implica $a\ge 8+\sqrt{80}$.

d) i valori di $a\ge 0$ per cui f è convessa.
$a=0$

2) Calcolare i seguenti limiti (il terzo al variare di $\alpha\in\mathbb{Q}$),

$$\lim_{x\to3}\frac{x^6-3^6}{x^8-3^8}=1/12,\qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!}=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^\alpha+x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+x^2}\qquad\left(=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^\alpha+x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=\begin{cases}+\infty & \text{se } \alpha<2/3\\ 1 & \text{se } \alpha=2/3\\ 0 & \text{se } \alpha>2/3\end{cases}\right)$$

Esercizio Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)}{e^{\sin x} - \cos(\sqrt{x}) - \frac{3}{2}x}.$$

SOL.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)}{e^{\sin x} - \cos(\sqrt{x}) - \frac{3}{2}x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)\right) - \frac{3}{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)\right) - \frac{3}{2}x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{\frac{11}{24}x^2 + o(x^2)} = \frac{6}{11}.$$