Esercizi

1) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$ su I: intervallo non contenente 0

Eq. omogenea associata: $y'' - 2y' + y = 0$

eq. caratteristica: $\underbrace{\lambda^2 - 2\lambda + 1}_{(\lambda-1)^2} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ sol. doppia $(\Delta = 0)$

$\varphi_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^t \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: int. generale dell'eq. omogenea

Cerco una sol. particolare di 1) del tipo

$\varphi_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$ con $c_1(t), c_2(t)$ sol. del sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t + c_2'(t)te^t = 0 \\ c_1'(t)e^t + c_2'(t)(1+t)e^t = \frac{e^t}{t} \end{cases}$$

Dividendo per e^t

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t)t = 0 \\ c_1'(t) + c_2'(t)(1+t) = \frac{1}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(t) = -t\,c_2'(t) \\ -t\,c_2'(t) + c_2'(t)(1+t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(t) = -1 \\ c_2'(t) = \frac{1}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1(t) = -t + \text{cost.} \\ c_2(t) = \log|t| + \text{cost.} \end{cases}$$

Quindi: $\varphi_p(t) = -te^t + (\log|t|)\cdot te^t = te^t(\log|t| - 1)$

$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_p(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + te^t(\log|t| - 1)$ int. gen. di 1) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$= \underbrace{c_1 e^t + \overset{c_2 - 1}{\overset{\shortparallel}{D}}\, te^t}_{\varphi_0} + \underbrace{te^t \log|t|}_{\tilde{\varphi}_p(t)}$ $\quad c_1, D \in \mathbb{R}$

$\tilde{\varphi}_p(t)$: un'altra sol. particolare di 1)

Nota: se prendiamo tutte le primitive $\begin{cases} c_1(t) = -t + D_1 \\ c_2(t) = \log|t| + D_2 \end{cases}$ $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$

$\varphi_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$: int. generale di 1) $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$

2) $y'' + \alpha y = 4\cos(2t)$. Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $t\,\mathrm{sen}(2t) = f(t)$ sia sol. di 2). Poi trovare l'int. generale.

$$\begin{cases} f'(t) = \mathrm{sen}(2t) + 2t\cos(2t) \\ f''(t) = 4\cos(2t) - 4t\,\mathrm{sen}(2t) \end{cases}$$

Sostituendo in 2) ho:

$$\left[4\cancel{\cos(2t)} - 4t\,\mathrm{sen}(2t)\right] + \alpha\, t\,\mathrm{sen}(2t) = 4\cancel{\cos(2t)} \iff \alpha = 4$$

L'eq. è $y'' + 4y = 4\cos(2t)$.

eq. caratteristica: $\underbrace{\lambda^2 + 4}_{(\lambda+2i)(\lambda-2i)} = 0$ $\quad(\Delta < 0)\quad$ $\lambda_{1,2} = \pm 2i = 0 \pm 2i$

$c_1 e^0\cos(2t) + c_2 e^0\,\mathrm{sen}(2t)$ int. gen. dell'eq. omogenea $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Poiché $t\,\mathrm{sen}(2t)$ è sol. particolare, ho

$c_1\cos(2t) + c_2\,\mathrm{sen}(2t) + t\,\mathrm{sen}(2t)$ int. gen. di 2) $[\alpha = 4]$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Metodo di somiglianza (o dei coefficienti indeterminati)

Prop: ⊛ $y'' + ay' + by = e^{ct}\left(p(t)\cos(dt) + q(t)\,\mathrm{sen}(dt)\right)$

con $\begin{cases} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ p(t), q(t) : \text{polinomi di grado } p, q. \end{cases}$

Sia $s :=$ molteplicità di $c + id$ come zero dell'eq. caratteristica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

cioè: $\begin{cases} s = 0 & \text{se } c+id \text{ non è zero} \\ s = 1 & \text{" " è zero semplice} \\ s = 2 & \text{" " " " doppio} \end{cases}$

Allora $\exists\ p_1(t), q_1(t)$: polinomi di grado $\leq \max(p,q)$ t.c. $\varphi_p(t) = t^s e^{ct}\left(p_1(t)\cos(dt) + q_1(t)\,\text{sen}(dt)\right)$ è sol. particolare di ⊛.

(Es) $\quad 4\cos(2t) = e^{ct}\left(p(t)\cos(dt) + q(t)\,\text{sen}(dt)\right)$

con $c=0$, $d=2$, $p(t)=4$, $q(t)=0$

$t\,\text{sen}(2t) = t^s\left(p_1(t)\cos(2t) + q_1(t)\,\text{sen}(2t)\right)$ con

con $\begin{cases} s=1 \text{ : molteplicità di } c+di = 0+2i \\ p_1(t) = 0 \\ q_1(t) = 1 \end{cases}$

3) $\quad y'' - 4y = 4e^{-2t}$

eq. caratteristica : $\lambda^2 - 4 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm 2 \quad (\Delta > 0)$

$\varphi_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$ int. generale dell'eq. omogenea $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} c = -2 \\ d = 0 \\ p(t) = 4 \quad \text{(polinomio di grado 0)} \end{cases} \quad s := (\text{molteplicità di } -2+0\cdot i) = 1$

Cerco una sol. particolare del tipo $\varphi_p(t) = t\,e^{-2t}\underbrace{p_1}_{\text{polinomio di grado 0}}$ con $p_1 \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} \varphi_p'(t) = p_1\left(e^{-2t} - 2te^{-2t}\right) \\ \varphi_p''(t) = 4p_1\left(t e^{-2t} - e^{-2t}\right) \end{cases}$ Sostituendo in 3), ho :

$4p_1\left(te^{-2t} - e^{-2t}\right) - 4p_1 t e^{-2t} = 4e^{-2t} \iff -p_1 = 1$

Quindi $\quad \varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_p(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - te^{-2t}$ int. gen. di 3)

Trovare, se esistono, le sol. di 3) t.c. $\varphi'(0) = 1$ e

$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$ finito.

Si ha $\lim_{t\to+\infty} \left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - t e^{-2t}\right) = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } c_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } c_1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow \varphi(t) = (c_2 - t)e^{-2t}$. Derivando e ponendo $\varphi'(0) = 1$ si trova $c_2 = -1 \Rightarrow \varphi(t) = -e^{-2t}(1+t)$.

4) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

eq. caratt. $\underbrace{\lambda^2 - 4\lambda + 4}_{(\lambda-2)^2} = 0 \iff \lambda_{1,2} = 2 \quad (\Delta = 0)$

$\varphi_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$ int. generale dell'omogenea

$\begin{cases} c = 2 \\ d = 0 \\ p(t) = 1 \end{cases}$ $\quad s = (\text{molteplicità di } 2) = 2$

Cerco sol. del tipo $\varphi_p(t) = t^2 e^{2t} p_1$ con $p_1 \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} \varphi_p'(t) = 2p_1 t\, e^{2t}(1+t) \\ \varphi_p''(t) = \dots = 2p_1 e^{2t}(2t^2 + 4t + 1) \end{cases}$ Sostituendoli in 4), ho:

$2p_1 e^{2t}\left[(2t^2 + 4t + 1) - 4t(1+t) + 2t^2\right] = e^{2t} \iff$

$2p_1 = 1 \Rightarrow \varphi_p(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$

$\varphi(t) = \left(c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}t^2\right)e^{2t}$ int. generale di 4) $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

5) $y'' + y = 3\cos t$

eq. caratt. $\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm i \quad (\Delta < 0)$

$\varphi_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$ int. generale omogenea

$\begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$ $\quad s = (\text{molteplicità di } 0 + i) = 1$

$p(t) = 3$ e $q(t) = 0$ polinomi di grado 0

Cerco sol. del tipo $\varphi_p(t) = t\,(p_1 \cos t + q_1 \operatorname{sen} t)$ con $p_1, q_1 \in \mathbb{R}$

Derivando e sostituendo in 5) si ha

$$-2p_1 \operatorname{sen} t + 2q_1 \cos t = 3\cos t \iff \begin{cases} p_1 = 0 \\ 2q_1 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi_p(t) = \tfrac{3}{2}\, t \operatorname{sen} t$$

$$\varphi(t) = c_1 \cos t + \left(c_2 + \tfrac{3}{2} t\right) \operatorname{sen} t$$ int. generale di 5) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

<u>Nota</u>: $y'' + a y' + b y = p(t)\, e^{ct}$ $(d = 0,\ p(t):$ polinomio$)$

Cerco sol. $\varphi_p(t) = Q(t)\, e^{ct}$ con $Q(t)$: polinomio

1) Se $s = 0$ (cioè c non è radice di $P(\lambda) = 0$: eq. caratt.)

derivata rispetto a λ, calcolata in c

φ_p è sol. $\iff \begin{cases} Q''(t) + \underbrace{P'(c)}_{2c+a}\, Q'(t) + P(c) Q(t) = p(t) \\ \text{grado } Q(t) \leq \text{grado } p(t) \end{cases}$

2) Se $s = 1$ (cioè c è radice semplice di $P(\lambda) = 0$ $\Rightarrow P(c) = 0$)

φ_p è sol. $\iff \begin{cases} Q''(t) + P'(c)\, Q'(t) = p(t) \\ Q(t) = t\, q(t) \quad \text{grado } q(t) \leq \text{grado } p(t) \end{cases}$

3) Se $s = 2$ (cioè c è radice doppia di $P(\lambda) = 0$ $\Rightarrow P(c) = 0$ e $P'(c) = 0$)

φ_p è sol. $\iff \begin{cases} Q''(t) = p(t) \\ Q(t) = t^2 q(t) \quad \text{grado } q(t) \leq \text{grado } p(t) \end{cases}$

6) $y'' + 2y' + y = (t^3 + t)\, e^{-t}$

eq. caratt. $\overbrace{\lambda^2 + 2\lambda + 1}^{(\lambda+1)^2} = 0 \iff \lambda_{1,2} = -1$ $(\Delta = 0)$

$$\varphi_0(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-t}$$

$$\begin{cases} c = -1 & \Rightarrow \quad s := (\text{molteplicità di } -1+0\cdot i) = 2 \\ d = 0 & \\ p(t) = t^3 + t & (\text{grado } 3) \end{cases}$$

$$a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Cerco una sol. del tipo $\varphi_p(t) = t^2 e^{-t} p_1(t)$ grado $p_1(t) \leq 3$

Derivando e sostituendo in 6), trovo a_3, a_2, a_1, a_0.

Oppure: $Q(t) := t^2 p_1(t)$ (polinomio di grado ≤ 5)

Per la Nota, $\varphi_p(t) = Q(t)\, e^{-t}$ è sol. di 6) $\Leftrightarrow$

$$Q''(t) = t^3 + t \quad \Leftrightarrow \quad Q'(t) = \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{2} t^2 + \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad Q(t) = \frac{1}{20} t^5 + \frac{1}{6} t^3 + \alpha t + \beta \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

Poiché $p_1(t) = t^{-2} Q(t)$ è polinomio, deve essere $\alpha = \beta = 0$

$$\Leftrightarrow \quad p_1(t) = \frac{1}{20} t^3 + \frac{1}{6} t.$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_p(t) = t^2 e^{-t} \left(\frac{1}{20} t^3 + \frac{1}{6} t \right)$$

$$\varphi(t) = \left(c_1 + c_2 t + \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{20} t^5 \right) e^{-t}$$ int. generale di 6)

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$