Esercizi

1) $$\begin{cases} y'' + 2y + y = (t^3 + t)\, e^{-t} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_p(t) = \left(c_1 + c_2 t + \frac{1}{20} t^5 + \frac{1}{6} t^3\right) e^{-t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

int. generale (vedi Esercizio 6) Lezione 10)

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1 = 0$$

$$\varphi'(t)\Big|_{t=0} = e^{-t}\left(-c_2 t - \frac{1}{20} t^5 - \frac{1}{6} t^3 + c_2 + \frac{5}{20} t^4 + \frac{3}{6} t^2\right)\Big|_{t=0}$$
$$= c_2 = 0$$

L'unica sol. al Pb. di Cauchy 1) è $\varphi(t) = \varphi_p(t)$.

Nota. se uno notava subito che $\varphi_p(0) = 0 = \varphi_p'(0)$, per l'unicità della sol. al Pb. di Cauchy non serviva fare i conti.

2) $$y'' - 2y' + y = t\, e^{3t}$$

eq. caratt. $\underbrace{\lambda^2 - 2\lambda + 1}_{P(\lambda) = (\lambda - 1)^2} = 0 \iff \lambda = 1 \quad (\Delta = 0)$

$\varphi_0(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^t$ int. gen. dell'omogenea $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} c = 3 \\ d = 0 \\ p(t) = t \end{cases}$$

$s = (\text{molteplicità di } 3 + 0 \cdot i) = 0$ (3 non è zero di $P(\lambda) = 0$)

polinomio di grado ≤ 1

Cerco una sol. particolare di 2) del tipo $\varphi_p(t) = p_1(t) e^{3t}$

$p_1(t) = a_1 t + a_0$. Sostituendo φ_p, φ_p' e φ_p'' in 2)

trovo a_1 e a_0.

Oppure, usando la <u>Nota</u> (con $s=0$, $Q(t) = p_1(t)$)

φ_p è sol. di 2) $\iff \underbrace{p_1''(t)}_{=0} + \underbrace{P'(3)}_{4}\underbrace{p_1'(t)}_{a_1} + \underbrace{P(3)}_{4}\underbrace{p_1(t)}_{a_1 t + a_0} = t$

$\iff 4a_1 + 4(a_1 t + a_0) = t$

$\iff (4a_1 - 1)t + 4(a_1 + a_0) = 0 \iff \begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_0 = -a_1 = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi_p(t) = \frac{1}{4}(t-1)e^{3t}$

$\varphi(t) = (c_1 + c_2 t)e^{3t} + \frac{1}{4}(t-1)e^{3t}$ int. generale di 2)
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3) $y'' - 2y' + y = e^t \operatorname{sen}^2 t$

Come per 2), $\varphi(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$ int. generale dell'omogenea
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Non posso usare direttamente il metodo di somiglianza.

<u>I metodo</u>: $e^t \operatorname{sen}^2 t = e^t \frac{1 - \cos(2t)}{2} = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^t \cos(2t)$

$(\cos(2t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t)$

<u>Prop</u> (Principio di sovrapposizione): date $g_1, g_2 \in C^0(I)$

$\circledast \quad \underbrace{y'' + ay' + by}_{L(y)} = g_1(t) + g_2(t)$

Se $\varphi_{p,i}$ è sol. di $y'' + ay' + by = g_i(t)$ per $i = 1,2$

$\Rightarrow \varphi_{p,1} + \varphi_{p,2}$ è sol. di $\circledast$.

DIM: $L(\varphi_{p,1}+\varphi_{p,2}) = L(\varphi_{p,1}) + L(\varphi_{p,2}) = \rho_1(t)+\rho_2(t)$ #

Per il Principio di sovrapposizione, cerco sol. particolari

$$\begin{cases} \varphi_{p,1} \text{ di } y''-2y'+y=\frac{1}{2}e^t \\ \varphi_{p,2} \text{ di } y''-2y'+y=-e^t\frac{1}{2}\cos(2t) \end{cases}$$ col metodo di somiglianza

Trovo $\begin{cases} \varphi_{p,1} = \frac{1}{4}t^2e^t & (c=1,\ d=0,\ s=2,\ p(t)=\frac{1}{2}) \\ \varphi_{p,2} = \frac{1}{8}\cos(2t)\,e^t & \left(c=1,\ d=2,\ s=0,\ \begin{matrix} p(t)=-\frac{1}{2} \\ q(t)=0 \end{matrix}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \varphi_p(t) = \varphi_{p,1}(t) + \varphi_{p,2}(t) = \left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{8}\cos(2t)\right)e^t$$

<u>II metodo</u>: uso la variazione delle costanti.

$\varphi_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)\,te^t$ con $c_1(t), c_2(t)$ soluzioni

di $\begin{cases} c_1'(t)e^t + c_2'(t)\,te^t = 0 \\ c_1'(t)e^t + c_2'(t)(1+t)e^t = e^t\operatorname{sen}^2 t \end{cases}$ Divido per e^t

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t)\,t = 0 \\ c_1'(t) + (1+t)c_2'(t) = \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(t) = -t\,c_2'(t) \\ c_2'(t) = \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1(t) = -\int t\operatorname{sen}^2 t\,dt \overset{\text{per parti}}{=} -t\left(\frac{t}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right)+\int\left(\frac{t}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right)dt \\ c_2(t) = \int \operatorname{sen}^2 t\,dt = \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{t}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}+\text{cost.} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1(t) = -t\left(\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right)+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{8}\cos(2t) \\ c_2(t) = \frac{t}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t) \end{cases}$$

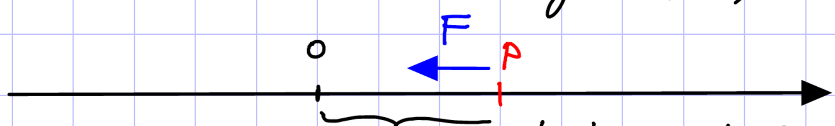
$\Rightarrow \varphi_p(t) = \ldots = \left(\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}\cos(2t)\right)e^t$: sol. particolare di 3)

$\varphi(t) = e^t\left(c_1 + c_2 t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}\cos(2t)\right)$ int. generale di 3)
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

OSCILLAZIONI ARMONICHE

1) Oscillatore libero

Pb: caratterizzare il moto di un punto P (corpo puntiforme) di massa m, che si muove lungo una retta ed è soggetto ad una forza elastica (a) proporzionale alla distanza dall'origine; b) diretta verso l'origine)



$y(t)$: distanza di P dall'origine al tempo t

$F = -Ky$ con $K > 0$: costante elastica

$F = ma$: legge di Newton

$\Rightarrow my'' = -Ky$: eq. del moto

$\Leftrightarrow y'' + \omega^2 y = 0$ con $\omega := \sqrt{\frac{K}{m}}$ eq. diff. lineare omogenea di ordine 2

eq. caratteristica : $\underbrace{\lambda^2 + \omega^2}_{(\lambda+i\omega)(\lambda-i\omega)} = 0$ $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ $(\Delta < 0)$

$\varphi(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\,\mathrm{sen}(\omega t)$ int. generale
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

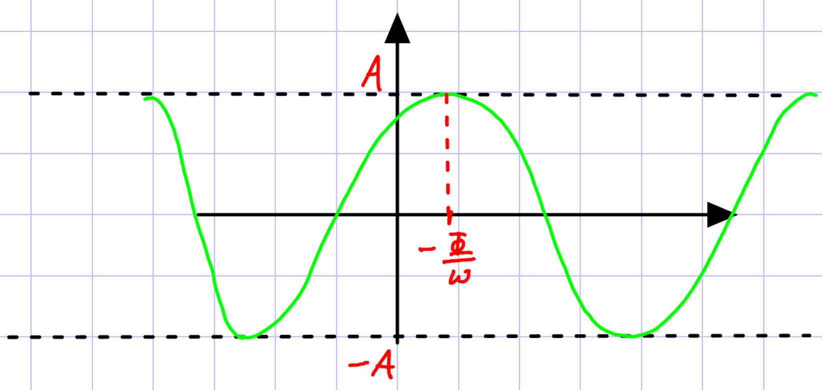
$\varphi(t) = 0$ $(c_1 = c_2 = 0)$: equilibrio

Posto $A := \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \geq 0$, si ha

$$y(t) = A\cos(\omega t + \Phi) \quad \text{con } \Phi \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} \cos(-\Phi) = \frac{c_1}{A} \\ \operatorname{sen}(-\Phi) = \frac{c_2}{A} \end{cases}$$

A := ampiezza ; Φ : fase iniziale

ω = pulsazione ; $T = \frac{2\pi}{\omega}$: periodo ; $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$: frequenza



nel disegno $\Phi < 0$

2) Oscillatore forzato

Pb : aggiungiamo una forza F dipendente solo dal tempo che agisca su P, soggetto alla forza elastica.

$F(t)$: forza $(\in \mathcal{C}^0(I))$

$F(t) - ky = my''$: eq. del moto

$\Rightarrow y'' + \omega^2 y = \rho(t)$ con $\rho(t) := \frac{1}{m}F(t)$ eq. diff. lineare non omogenea

Supponiamo $\rho(t) = H\cos(\theta t)$ con $H, \theta \in \mathbb{R}$

Cerchiamo sol. particolari y_p col metodo di somiglianza

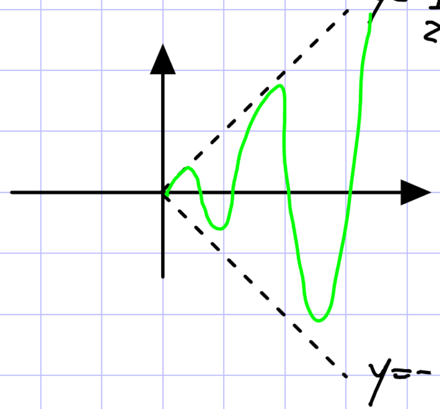
$\begin{cases} c = 0 \\ d = \theta \end{cases}$ $\quad s = (\text{molteplicità di } 0 + i\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta \neq \omega \\ 1 & \text{se } \theta = \omega \end{cases}$

$$p(t) = H \quad \Rightarrow \quad \varphi_p(t) = \begin{cases} p_1 \cos(\sigma t) + q_1 \operatorname{sen}(\sigma t) & \text{se } \sigma \neq \omega \\ t\left(p_1 \cos(\omega t) + q_1 \operatorname{sen}(\omega t)\right) & \text{se } \sigma = \omega \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli trovo:

$$\varphi_p(t) = \begin{cases} \frac{H}{\omega^2 - \sigma^2} \cos(\sigma t) & \text{se } \omega \neq \sigma \quad (s=0) \\ \frac{H}{2\omega}\, t \operatorname{sen}(\omega t) & \text{se } \omega = \sigma \quad (s=1) \end{cases}$$

Se $\sigma = \omega$, $\varphi_p(t)$ ha grafico:



$\Rightarrow$ e' "ampiezza" $\to +\infty$

(fenomeno della <u>risonanza</u>)

<u>Esercizi</u>

1) $\begin{cases} y' - y \cot g\, t = \operatorname{sen}^3 t \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$ Risolverlo su I: intervallo contenente $\frac{\pi}{2}$.

eq. lineare di ordine 1

$$A'(t) = -\cot g\, t \quad \Rightarrow \quad A(t) = -\log|\operatorname{sen} t|$$

$$c(t) = \int \underbrace{e^{-\log|\operatorname{sen} t|}}_{\frac{1}{\operatorname{sen} t}} \operatorname{sen}^3 t \, dt = \int \operatorname{sen}^2 t \, dt \quad (\operatorname{sen} t > 0 \text{ su } I \subseteq]0, \pi[)$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2t) + c$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = e^{\log(\operatorname{sen} t)} \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2t) + c\right)$$

$$= \operatorname{sen} t \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2t) + c\right) \quad : \text{int. generale } c \in \mathbb{R}$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff \frac{\pi}{4} + c = 0 \iff c = -\frac{\pi}{4}$$

2) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1-e^{t}}$