

Esercizi

$$1) \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1-e^t}$$

a) trovare l'integrale generale su I non contenente 0

eq. caratteristica: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -1, -2 \quad (\Delta > 0)$
 $(\lambda+1)(\lambda+2)$

$$\varphi_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad \text{int. generale dell'omogenea}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Cerco $\varphi_p(t) = c_1(t) e^{-t} + c_2(t) e^{-2t}$ con $c_1(t), c_2(t)$

sol. di $\begin{cases} c_1'(t) e^{-t} + c_2'(t) e^{-2t} = 0 \\ -c_1'(t) e^{-t} - 2c_2'(t) e^{-2t} = \frac{1}{1-e^t} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(t) = -c_2'(t) e^{-t} \\ c_2'(t) = \dots = -\frac{e^{2t}}{1-e^t} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(t) = \frac{e^t}{1-e^t} \\ c_2'(t) = -\frac{e^{2t}}{1-e^t} \end{cases}$$

$$= e^t \frac{1-e^t-1}{1-e^t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1(t) = -\log|1-e^t| \\ c_2(t) = e^t + \log|1-e^t| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi_p(t) = -(\log|1-e^t|) e^{-t} + (e^t + \log|1-e^t|) e^{-2t}$$

$$= e^{-t} \left((e^t - 1) \log|1-e^t| + 1 \right)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_p(t) = c_1 e^{-t} + (c_2 + (e^t - 1) \log|1-e^t| + 1) e^{-2t}$$

int. generale su $I \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) trovare le sol. su $]0, +\infty[$ t.c. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 1$.

Poiché $\lim_{y \rightarrow 0^+} y \log y = 0$, ho $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^t - 1) \log(e^t - 1) = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 + c_2 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad c_2 = -c_1$$

$$\text{quindi: } \varphi(t) = c e^{-t} + \left(-c + (e^t - 1) \log(e^t - 1) + 1 \right) e^{-2t}$$

$$\forall c \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad y' = (y + \sqrt{y} - y') t g t$$

trovare gli int. singolari e l'integrale generale in un intorno di 0 (eventualmente in forma implicita)

$$2) \quad \text{si scrive} \quad y' = \underbrace{(y + \sqrt{y})}_{h(y)} \underbrace{\frac{t g t}{1 + t g t}}_{g(t)} : \text{eq. a variabili separabili.}$$

$$h(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad \varphi(t) \equiv 0 : \text{int. singolare}$$

$$\text{Separando le variabili: } \otimes: \int \frac{dy}{y + \sqrt{y}} = \int \frac{t g t}{1 + t g t} dt$$

$$\int \frac{t g t}{1 + t g t} dt \stackrel{(\ominus)}{=} \int \frac{v}{(1+v)} \frac{dv}{1+v^2} \Big|_{v=t g t}$$

$$\frac{v}{(1+v)(1+v^2)} = \underbrace{\frac{A}{1+v} + \frac{Bv+C}{1+v^2}}_{\text{decomposizione in frazioni semplici}} \quad \text{per qualche } A, B, C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{v}{(1+v)(1+v^2)} = \frac{A(1+v^2) + (Bv+C)(1+v)}{(1+v)(1+v^2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = C = \frac{1}{2}, \quad A = -\frac{1}{2} \quad \text{Quindi:}$$

$$\int \frac{v dv}{(1+v)(1+v^2)} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+v} dv + \frac{1}{2} \int \frac{v+1}{1+v^2} dv$$

$$= -\frac{1}{2} \log |1+v| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \log(1+v^2) + \frac{1}{2} \arctan v + \text{cost.}$$

$$\Rightarrow \int \frac{t^2 t}{1+t^2 t} dt = \frac{1}{2} \left(\log \frac{(1+v^2)^{1/2}}{|1+v|} + \arctan v \right) \Big|_{v=t^2 t} + \text{cost.}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\log \frac{(1+t^2 t)^{1/2}}{|1+t^2 t|} + t \right) + \text{cost.}$$

$$\int \frac{dy}{y + \sqrt{y}} \stackrel{(\odot)}{\Big|}_{v=\sqrt{y}} \int \frac{1}{v^2 + v} 2v dv \Big|_{v=\sqrt{y}} = 2 \log |1+v| \Big|_{v=\sqrt{y}} + \text{cost.}$$

$$= 2 \log(1 + \sqrt{y}) + \text{cost.}$$

Quindi: $\circledast \Leftrightarrow \log(1 + \sqrt{y})^2 = \log \left(\frac{1+t^2 t}{(1+t^2 t)^2} \right)^{1/4} + \frac{t}{2} + c$
 $\forall c \in \mathbb{R}$

Passando all'esponenziale, ho:

$$(1 + \sqrt{y})^2 = \left(\frac{1+t^2 t}{(1+t^2 t)^2} \right)^{1/4} e^{\frac{t}{2}} e^c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \underset{e^{\frac{c}{2}}}{k} \left(\frac{1+t^2 t}{(1+t^2 t)^2} \right)^{1/8} e^{\frac{t}{4}} - 1 : \text{forma implicita } \forall k > 0$$

(Per esplicitare y , bisognerebbe studiare il segno del secondo termine.)

$$3) \begin{cases} (t^2 + t + 1) y' = t^3 (y-1)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Poiché $t^2 + t + 1 \neq 0 \quad \forall t$, l'eq. diff. è equivalente a

$$y' = \frac{t^3}{t^2 + t + 1} \underbrace{(y-1)^2}_{h(y)} : \text{eq. a variabili separabili}$$

$h(y) = 0 \Rightarrow y = 1$. $y(t) = 1$: int. singolare

Separando le variabili:

$$\int \underbrace{\frac{dy}{(y-1)^2}}_{-\frac{1}{y-1}} = \int \frac{t^3}{t^2 + t + 1} dt$$

$$t-1 + \frac{1}{t^2 + t + 1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + \left(\frac{et+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y-1} = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{\frac{t^2}{2} - t + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c}$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\frac{t^2}{2} - t + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c} \quad \text{è sol. di 3)}$$

$$\Leftrightarrow y(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + c} = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Nei prossimi esercizi, studiare la convergenza assoluta / semplice delle serie al variare di $x \in \mathbb{R}$.

$$4) \sum_{n \geq 1} \left(\sin \left(x + \frac{1}{n} \right) \right)^n$$

Studio la serie a termini positivi: $\sum_{n \geq 1} \underbrace{\left(\sin \left(x + \frac{1}{n} \right) \right)^n}_{a_n}$

con il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left| \sin\left(x + \frac{1}{n}\right) \right| \rightarrow \left| \sin x \right| \leq 1 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Se $|\sin x| < 1$, cioè se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$, la

serie $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ converge $\Rightarrow$ 4) converge assolutamente (quindi converge)

Se $|\sin x| = 1$, cioè se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$, si ha:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{1}{n}\right) = (-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) = (-1)^k \cos \frac{1}{n} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Verifichiamo se } \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\cos \frac{1}{n}\right)^n}_{>0} = 0$$

$$= e^{n \log(\cos \frac{1}{n})} \rightarrow 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \log\left(\cos \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\cos \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \stackrel{(\infty/\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log \cos x}{x}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0$$

Quindi $|a_n|$, e a fortiori a_n , non è infinitesimo $\Rightarrow$ 4) non converge. Precisamente:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } k \text{ pari} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n \text{ diverge a } +\infty \quad (a_n \geq 0) \\ \text{se } k \text{ dispari} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n \text{ è a segni alterni, quindi} \\ \text{è indeterminata} \end{array} \right.$

$$5) \sum_{n \geq 0} \underbrace{n \left(\pi - 2 \arctan \sqrt{n} \right)}_{\geq 0} x^n$$

$$\left(\begin{array}{l} a_n = \left((-1)^n \cos \frac{1}{n} \right)^n \\ \quad \quad \quad = (-1)^n \underbrace{\left(\cos \frac{1}{n} \right)^n}_{>0} \end{array} \right)$$

Con il criterio del rapporto:

$$\frac{(n+1) (\pi - 2 \arctan \sqrt{n+1}) |x|^{n+1}}{n (\pi - 2 \arctan \sqrt{n}) |x|^n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow |x| \text{ per } n \rightarrow +\infty} |x| \frac{\pi - 2 \arctan \sqrt{n+1}}{\pi - 2 \arctan \sqrt{n}} \xrightarrow{1}$$

$$\text{Si ha: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arctan \sqrt{n+1}}{\pi - 2 \arctan \sqrt{n}} \stackrel{H}{=} \lim_n \frac{-2 \frac{1}{1+n+1} \frac{1}{2\sqrt{n+1}}}{-2 \frac{1}{1+n} \frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_n \frac{n+1}{n+2} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } |x| < 1 \Rightarrow 5) \text{ converge assolutamente} \\ \text{se } |x| > 1 \Rightarrow 5) \text{ non converge. Precisamente:} \end{cases}$$

se $x > 1$, 5) è a termini positivi $\Rightarrow$ diverge a $+\infty$

se $x < -1$, 5) è indeterminata ($x^n = (-1)^n |x|^n$ se $x < 0$)

Se $|x| = 1$, cioè $x = 1$ oppure $x = -1$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\pi - 2 \arctan \sqrt{n}) = \dots \stackrel{H}{=} \lim_n \frac{n}{n+1} \frac{n}{\sqrt{n}} = +\infty$$

$\Rightarrow$ il termine generale di 5) non è infinitesimo

$\Rightarrow$ 5) non converge. Precisamente:

$$\begin{cases} \text{se } x = 1 \Rightarrow 5) \text{ è a termini positivi} \Rightarrow \text{diverge a } +\infty \\ \text{se } x = -1 \Rightarrow 5) \text{ è a segni alterni} \Rightarrow \text{indeterminata} \end{cases}$$

$$6) \sum_{n \geq 1} (-1)^n \left[\sqrt{\frac{1}{n}} - \log \left(1 + \frac{1}{n^d} \right) \right]$$

a) Determinare i valori di $d > 0$ t.c. 3) è ass. convergente.

Pagina 6 b) Studiare la convergenza semplice per $d = \frac{1}{2}$

(conviene studiare la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$)

$$7) \sum_{n \geq 1} \left(\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) (x-2)^n \quad \text{per } x \in \mathbb{R}$$