

Ricordo: $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge $\forall a \geq 0$.

In particolare: $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$.

Nota: più in generale:

1) se $\lim_n \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \lim_n a_n = 0$

2) se $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \lim_n a_n = 0$

Prop. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = e$

Dim: $e := \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ Si ha:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Passando ai limiti, perché $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ converge:

$e \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$. Per dimostrare " $\geq$ ";

$\forall n \geq p$ si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}$$

$$\geq 2 + \sum_{k=2}^p \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\downarrow 1} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\downarrow 1} \frac{1}{k!} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow e \geq 2 + \sum_{k=2}^p \frac{1}{k!}$$

per $p \rightarrow +\infty$: $e \geq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$. #

Nota: possiamo $e^a = \lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$, n. dimostrare che

$e^a = \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ per $a \geq 0$.

Def: data $\sum_{n \geq 0} a_n$ convergente a $s \in \mathbb{R}$, il suo
resto n -esimo è $s - \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k \geq n+1} a_k =: r_n$

Nota: $\lim_n r_n = 0$

Dim: $\lim_n r_n = \lim_n \left(s - \sum_{k=0}^n a_k \right) = s - \sum_{n \geq 0} a_n = 0$. #

Lemma: Sia r_n il resto n -esimo di $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$.
 $\Rightarrow 0 < r_n < \frac{1}{n!n} \quad \forall n \geq 1$.

Dim: $0 < r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots$
 $= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right)$
 $\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right)$
 $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}$
 $= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!n}$. #

Prop: e è irrazionale.

Dim: per assurdo $e = \frac{m}{n}$ con $m, n \geq 1$. Allora:

$0 < n! r_n \stackrel{\text{Lemma}}{<} \frac{1}{n} \leq 1$ (sempre vero) $\in \mathbb{N}$ per $k \leq n$
 $\Delta n! r_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) = \underbrace{n! e}_{(n-1)!n \in \mathbb{N}} - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$

$\Rightarrow n! r_n \in \mathbb{N}$: assurdo! #

Th (criterio integrale): Sia $f: [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positiva ($f(x) \geq 0 \forall x \in [n_0, +\infty[$) e decrescente.
 (Es: $f(x) = \frac{1}{x}$). Allora $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ e $\int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx$ hanno lo stesso carattere.

Cor: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^d}$ e $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\log_b n)^d}$ (con $b > 1$) convergenti: $\Leftrightarrow d > 1$.

Esercizio: trovare gli $d > 0$ per cui la serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{3dn - \sqrt{n^2 + 1}}{(n+3)^{2d}} \text{ con } \left(\frac{1}{1+n} \right)$$

Notazione: $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se f e g hanno lo stesso ordine per $x \rightarrow x_0$.

Abbiamo: $\text{con } \left(\frac{1}{1+n} \right) \sim \frac{1}{1+n} \sim \frac{1}{n}$ (per $n \rightarrow +\infty$)
 $(n+3)^{2d} \sim n^{2d}$

Rimane $3dn - \sqrt{n^2 + 1} \stackrel{\text{razionalizzando}}{\sim} \frac{(9d^2 - 1)n^2 - 1}{3dn + \sqrt{n^2 + 1}} \sim \frac{(9d^2 - 1)n^2 - 1}{(3d+1)n}$

$$\sim \begin{cases} (3d-1)n & d \neq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{n^{5/3}} & d = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Allora $\frac{3dn - \sqrt{n^2 + 1}}{(n+3)^{2d}} \text{ con } \left(\frac{1}{1+n} \right) \sim \begin{cases} \frac{1}{n^{2d}} & d \neq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{n^{5/3}} & d = \frac{1}{3} \end{cases}$

Ne segue che il segno del termine generale è

"definitivamente" costante ($\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0$ $a_n > 0$, oppure $\forall n \geq n_0$ $a_n < 0$) e posso applicare il criterio del confronto asintotico $\Rightarrow$ la serie converge per $\alpha = \frac{1}{3}$ e per $\alpha \neq \frac{1}{3}$ quando $2\alpha > 1$, cioè $\alpha > \frac{1}{2}$.
In definitiva, la serie converge per $\alpha \in \{\frac{1}{3}\} \cup]\frac{1}{2}, +\infty[$

Nota: Se $\sum_{n \geq 0} a_n$ ha termini tutti negativi, cioè

$$\forall n \geq 0 \quad a_n \leq 0, \text{ si ha } a_n = -(\underbrace{-a_n}_{\geq 0}) \text{ e}$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n = \sum_{n \geq 0} -(-a_n) = - \sum_{n \geq 0} (-a_n); \text{ quindi posso}$$

usare i criteri visti per la serie a termini positivi $\sum_{n \geq 0} (-a_n)$.

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNATO

th (criterio di Leibniz): Data $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$

se $(a_n)_{n \geq 0}$ decrescente e infinitesima, allora

la serie converge. Inoltre $\forall n: |R_n| \leq a_{n+1}$

$$s_{2n+1} \leq \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n \leq s_{2n} \quad \left(s_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right).$$

E1: 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ serie armonica a segno alternato:
è convergente per il criterio di Leibniz.

Def: data una succ. $(a_n)_{n \geq 1}$, la succ. delle

media aritmetica è la m.c.

$$M(a_n) := \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}$$

th: se $\lim_n a_n$ esiste, finito o infinito, allora anche $\lim_n M(a_n)$ esiste e coincide con $\lim_n a_n$.

Nota: Se $\lim_n M(a_n)$ esiste, non è detto che $\lim_n a_n$ esista.

(Es) $a_n = (-1)^n$ non converge.

$$M((-1)^n) = \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^k}{n} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_n M(a_n) = 0$ (" $(-1)^n$ converge a 0 in media aritmetica ").

(En) 2) $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$

Per usare il criterio di Leibniz, bisogna verificare

che: $\begin{cases} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \text{ è decrescente (esercizio)} \\ \lim_n \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{n}}_M = 0 \end{cases}$

$$M\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0 \text{ perché } \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Nota: $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ è indeterminata, perché

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \Rightarrow \lim_n s_n \text{ non esiste.}$$

Calcoliamo $\lim_n M(s_n)$. Poiché $s_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \forall n$

si ottiene $\lim_n M(s_n) = \frac{1}{2}$ (verificato), quindi

" $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ converge a $\frac{1}{2}$ in media aritmetica".

Notiamo che $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ per $|x| < 1$.

$\frac{1}{1-x}$ si dice "prolungamento" della serie $\sum_{n \geq 0} x^n$

$\Rightarrow$ in $x = -1$ si ha $\left(\sum_{n \geq 0} x^n \right) \Big|_{x=-1} \stackrel{\text{per definizione!}}{=} \frac{1}{1-x} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{2}$

quindi " $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge in $x = -1$ a $\frac{1}{2}$ per prolungamento".

SERIE A SEGNO ARBITRARIO

Def: $\sum_{n \geq 0} a_n$ è assolutamente convergente se

la serie $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ è convergente.

(Es) $\sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge assolutamente (infatti:

$$\sum_{n \geq 0} \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right| = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} : \text{serie geometrica} \text{ e}$$

converge nel senso solito ("semplicemente")

Th (intervallo della convergenza assoluta): se $\sum_{n \geq 0} a_n$

converge assolutamente, essa converge (semplicemente)

$$\text{e } \left| \sum_{n \geq 0} a_n \right| \leq \sum_{n \geq 0} |a_n|.$$

Def: $\forall x \in \mathbb{R}: x^+ := \frac{x + |x|}{2} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ parte positiva di x

$x^- := \frac{|x| - x}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ parte negativa di x

Si ha: $0 \leq x^+, x^- \leq |x|$ e $x = x^+ - x^-$
 $|x| = x^+ + x^-$

DIM: Perché $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge e $0 \leq a_n^+, a_n^- \leq |a_n|$

$\Rightarrow$ per il th. del confronto le due serie

(a termini. positivi) $\sum_{n \geq 0} a_n^+, \sum_{n \geq 0} a_n^-$ convergono.

Allora $\sum_{n \geq 0} a_n^+ - \sum_{n \geq 0} a_n^- = \sum_{n \geq 0} \underbrace{(a_n^+ - a_n^-)}_{a_n}$

converge. Inoltre, dalla disuguaglianza

triangolare: $\left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k|$ segue

$$\underbrace{\lim_n \left| \sum_{k=0}^n a_k \right|}_{\left| \lim_n \sum_{k=0}^n a_k \right|} \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| \quad \#$$

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n \right|$$

Nota: non è vero il viceversa.

(E) 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge semplicemente, ma non assolutamente.

2) Lo stesso per $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$, infatti:
 $\frac{1}{n} \left(1 + \dots + \frac{1}{n} \right) > \frac{1}{n}$.