Nota: Se $\lim_n |a_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} |a_n|$ diverge; ma anche $\lim_n a_n \neq 0$ oppure non esiste; quindi $\sum_{n\geq 0} a_n$ non converge. Ad esempio, se $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ oppure $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \lim_n |a_n| \neq 0$.

Es 1) $\sum_{n\geq 0} \underbrace{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \alpha^n}_{a_n}$ non converge se $|\alpha|>1$ e converge ass. se $|\alpha|<1$

[$n!!$: semi-fattoriale $:= \begin{cases} \text{prodotto termini pari} \leq n \text{ se } n \text{ pari} \\ \text{prodotto termini dispari} \leq n \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases}$]

Con il criterio del rapporto: $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$$\lim_n \frac{\frac{(2(n+1)+1)!!}{(2(n+1)+2)!!} |\alpha|^{n+1}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} |\alpha|^n} = \lim_n \frac{(2n+3)!!\,(2n+2)!!}{(2n+4)!!\,(2n+1)!!} |\alpha|$$

$$= \lim_n \frac{(2n+3)\cancel{(2n+1)!!}\,\cancel{(2n+2)!!}}{(2n+4)\cancel{(2n+2)!!}\,\cancel{(2n+1)!!}} |\alpha| = |\alpha|$$

[$(2n+1)!! = (2n+1)\,(2n-1)!!$
$2n!! = 2n(2n-2)!!$]

$\Rightarrow$ se $|\alpha| < 1$, la serie $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ converge assolutamente

Se $|\alpha|>1$, per l'osservazione sopra, la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ non converge. Si può dimostrare che per $\alpha=1$ converge.

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!}$ converge assolutamente $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$. Infatti:

$\sum_{n\geq 0} \left|\frac{\alpha^n}{n!}\right| = \sum_{n\geq 0} \frac{|\alpha|^n}{n!}$ converge (visto con il criterio del rapporto)

Vedremo che $\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!}$ converge a e^α (visto per $\alpha=1$).

SERIE DI TAYLOR

$f : I \to \mathbb{R}$ (I: intervallo aperto) derivabile ∞-volte in $x_0 \in I$

<u>Def</u>: 1) La serie $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ è la serie di Taylor di f centrata in x_0.

2) Se $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ converge a $f(x)$ $\forall x \in$ intorno di $x_0 \subseteq I$

$\Rightarrow$ f è sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0.

<u>th</u>: Se $\begin{cases} f \text{ derivabile } \infty\text{-volte in } I := \{|x-x_0| \leq \delta\} \\ |f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in I \text{ e } \forall n \geq 0 \end{cases}$

allora f è sviluppabile in serie di Taylor in x_0.

DIM: $\forall x \in I$, $r_n(x) :=$ resto n-esimo di $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

cioè, è il resto della formula di Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x) \quad \forall x \in I \quad \forall n \geq 0.$$

Si ha la stima: $|r_n(x)| \leq \left(\max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)|\right) \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$

$\forall x \in I$ $\forall n \geq 0$.

Per ipotesi $|f^{(n)}(x)| \leq M$ $\forall x \in I$ $\forall n \geq 0$, quindi

$$|r_n(x)| \leq M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0 \text{ per } n \to +\infty$$

Quindi passando al limite la formula di Taylor

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x \in I.$$

#

Es1 1) e^x è sviluppabile in serie di Taylor centrata in ogni punto. Infatti: e^x è C^∞ e $\forall\, n \geq 0$

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} e^x \right| = |e^x| \leq \underbrace{e^\delta}_{M} \quad \forall\, x \in I = \{ |x - x_0| \leq \delta \}$$

In particolare per $x_0 = 0$: $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \quad \forall\, x$

(visto per $x = 1$)

2) $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ sono sviluppabili in serie di Taylor centrata in ogni punto. Infatti: $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ sono C^∞ e

$$\begin{cases} \left| \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{sen} x \right| \leq 1 & \forall\, n \geq 0 \\ \left| \frac{d^n}{dx^n} \cos x \right| \leq 1 & \text{"} \end{cases}$$

3) $\frac{1}{1-x}$ in $]-1,1[$ è sviluppabile in serie di Taylor e in $x_0 = 0$: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n \quad \forall\, x \in]-1,1[$

Integrando ambo i termini tra 0 e x ottengo:

$-\log(1-x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ da cui, sostituendo $-x$ con x : $\log(1+x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad x \in]-1,1[$

Cambiando x con $-x^2$ in $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$ ottengo

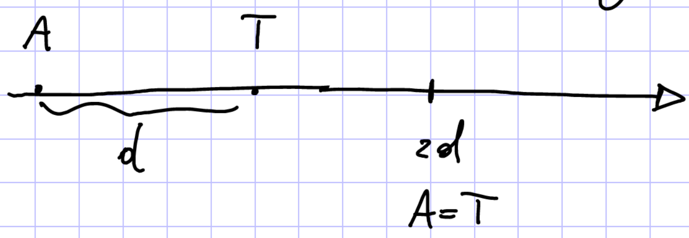
$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}$. Integrando ambo i termini

$\operatorname{arctg} x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Per $x = 1$, si ha:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} .$$

Nota: 1) esistono funzioni C^∞ non sviluppabili in serie di Taylor.

2) "Achille e la tartaruga": paradosso di Zenone



Ip: A va a velocità v costante e doppia rispetto a quella di T

Considerazioni "empiriche": $t := \frac{d}{v}$ tempo necessario ad A per percorrere d

$\Rightarrow$ in $2t$, $\begin{cases} A \text{ arriva a } 2d = (2t)v \\ T \quad " \quad " \quad d + (2t)\frac{v}{2} = 2d \end{cases}$

Considerazioni "filosofiche": al tempo t, A è in d e T è in $d + \frac{d}{2}$; al tempo $t + \frac{t}{2}$, A è in $d + \frac{d}{2}$ e T in $d + \frac{d}{2} + \frac{d}{4}$, ecc. Quindi: al tempo

$$\sum_{n \geq 0} \frac{t}{2^n} = t\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\right) = t \, \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2t,$$

ma A che T sono in $\sum_{n\geq 0} \frac{d}{2^n} = 2d$.

Esercizi: 1) $S(\alpha) := \sum_{n \geq 1} \underbrace{\left(\frac{\log\left(e - \frac{1}{n}\right)}{\alpha}\right)^n}_{a_n}$ con $\alpha > 0$.

a) determinare α per cui $S(\alpha)$ converge;

b) mostrare che per $\alpha = 1$, $S(\alpha)$ diverge;

c) mostrare che $\lim_{\alpha \to +\infty} S(\alpha) = 0$.

a) Poiché $a_n \geq 0 \ \forall n$, provo con il criterio della radice:

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{1}{\alpha} \log\left(e - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow$$ la serie converge

se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha < 1$.

b) Se $\alpha = 1$: $S(1) = \sum_{n \geq 1} [\underbrace{\log(e - \frac{1}{n})}_{y}]^n$. Uso la sostituzione

$$y = \log\left(e - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow e^y = e - \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{e - e^y}$$

$$\Rightarrow y^n = y^{\frac{1}{e-e^y}} = e^{\frac{1}{e-e^y}\log y}, \text{ quindi}$$

Calcolo $\lim_n \left[\log\left(e - \frac{1}{n}\right)\right]^n = \lim_{y \to 1} e^{\frac{1}{e-e^y}\log y} = \underbrace{e^{\overbrace{\lim_{y\to 1} \frac{\log y}{e - e^y}}^{\overset{H}{=} -\frac{1}{e}}}}_{e^{-\frac{1}{e}} \neq 0}$.

$\Rightarrow S(1)$ non converge.

c) Poiché $e - \frac{1}{n} < e \ \forall n \Rightarrow \log\left(e - \frac{1}{n}\right) < 1$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{\log(e - \frac{1}{n})}{\alpha}\right)^n < \frac{1}{\alpha^n}.$$ Per $\alpha > 1$

$$0 < S(\alpha) = \sum_{n\geq 1} a_n \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} - 1 \to 0$$

per $\alpha \to +\infty \Rightarrow \lim_{\alpha \to +\infty} S(\alpha) = 0$

2) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare il comportamento di a) $\sum_{n \geq 1} n^\alpha \log n$; b) $\sum_{n\geq 1} \left(n^{n^\alpha} - 1\right)$

a) La serie è a termini positivi e

$$\lim_n \frac{n^\alpha \log n}{\frac{1}{n^\beta}} = \lim_n n^{\alpha+\beta} \log n = 0 \quad \text{se } \alpha < -\beta$$

$\Rightarrow$ se $\alpha < -\beta$, $n^\alpha \log n = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$. Quindi:

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\beta}$ converge per $\beta > 1$ $\Rightarrow$ per il criterio del confronto asintotico $\sum_{n\geq 1} n^\alpha \log n$ converge per $\alpha < -\beta < -1$ $\forall\, \beta > 1$, quindi $\forall\, \alpha < -1$.

Se $\alpha \geq -1$, $\frac{1}{n^{-\alpha}} = o(n^\alpha \log n)$ quindi, poiché $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{-\alpha}}$ diverge, diverge anche $\sum_{n\geq 1} n^\alpha \log n$.

b) $\lim_n \underbrace{(n^{n^\alpha} - 1)}_{e^{n^\alpha \log n} - 1} = +\infty$ se $\alpha \geq 0$ $\Rightarrow$ la serie non converge.

$\left(\lim_n n^\alpha \log n = +\infty \text{ se } \alpha \geq 0\right)$

Poiché $\lim_n n^\alpha \log n = 0$ se $\alpha < 0$, si ha (se $\alpha < 0$)

$$n^{n^\alpha} - 1 = e^{n^\alpha \log n} - 1 \sim n^\alpha \log n \quad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi, confrontandola con la serie precedente, si ha che $\sum_{n\geq 1} (n^{n^\alpha} - 1)$ converge se $\alpha < -1$ e diverge altrimenti.